

Методи и средства обработки сигналов и изображений

УДК 519.6

А.О. Попов, канд. техн. наук, М.А. Жуков

Неперервне вейвлет-перетворення дискретних сигналів, що не потребує інтегрування

Рассмотрены вопросы численной реализации непрерывного вейвлет-преобразования дискретных сигналов. Предложена методика расчета непрерывного вейвлет-преобразования для анализа дискретных сигналов, не требующая интегрирования вейвлет-функций на интервале дискретизации сигнала. Расчеты по предложенной методике дают выигрыш по времени в 413,9 раз.

Numerical implementation of continuous wavelet transform of discrete signals is considered. The new method of continuous wavelet transform's estimation for discrete signals analysis is proposed. The method doesn't require an integration of wavelet functions over the sampling interval. The computations using the proposed method are 413,9 times faster than using existing method.

Вступ

Для розрахунку вейвлет-перетворень дискретних сигналів у переважній кількості випадків використовують заміну неперервного вейвлет-перетворення на ортогональне діадне вейвлет-перетворення (ОДВП), або використовують кратномасштабний аналіз. В цьому випадку материнська вейвлет-функція має утворювати при масштабуванні ортогональний базис. Якщо ця умова не виконується, необхідно виконувати апроксимацію розрахунку НВП для дискретних сигналів. Одною з задач при цьому є отримання виразу для чисельної реалізації НВП через відліки сигналів та вейвлет-функцій. Одна з методик викладена у роботі [1], де пропонується виконувати кусково-лінійну інтерполяцію значень сигналу. Також ця методика вимагає розрахунків інтегралів від вейвлет-функції на кожному інтервалі дискретизації. Задачею даної роботи є створення більш простої методики розрахунку НВП дискретних сигналів, яка не вимагає складних та тривалих обчислень.

Робота організована таким чином: в першому розділі викладені основні положення неперервного вейвлет-перетворення; в другому – подано існуючу методику розрахунку НВП дискретних сигналів, визначені її недоліки та запропо-

новано новий спосіб розрахунку; в третьому – описані результати чисельних експериментів з порівняння існуючої та нової методик.

1. Неperервне вейвлет-перетворення неперервних сигналів

Вейвлет-аналіз став фактично стандартним інструментом для дослідження частотно-часової поведінки сигналів. На відміну від класичних методів аналізу Фур'є, які представляють сигнали у вигляді комплексного гармонічного спектру, вейвлет-аналіз дає опосередковану інформацію про частотний склад сигналу та його зміну в часі через розклад сигналу на сукупність складових з компактним носієм, кожна з яких є розтягнутою або стиснутою копією єдиної материнської вейвлет-функції [2].

Теорія вейвлет-перетворень представлені у багатьох підручниках [2-3]. Далі розглянемо основні положення, які необхідні для викладення суті роботи.

Нехай маємо неперервний сигнал нескінченної тривалості, що описується функцією $s(t)$ – вектором гільбертового простору вимірних за Лебегом інтегрованих з квадратом неперервних функцій однієї змінної: $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Задамо скалярний добуток двох векторів:

$$\langle f(t), s(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \overline{s(t)} dt.$$

Вертикальна риска над функцією позначатиме комплексну спряженість. Для сигналів задамо норму:

$$\|s(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt}.$$

Перетворення Фур'є від функції будемо позначати:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Дійсна функція $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, що задовольняє «умову допустимості»

$$C_{\psi} = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \quad (1)$$

та має одиничну норму $\|\psi(t)\| = 1$, називається **материнським вейвлетом**. Для заданого масштабу a та зміщення b цей вейвлет породжує набір розтягнутих або стиснутих вейвлет-функцій, кожна з яких може бути отримана за правилом:

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2)$$

Якщо було обрано певний материнський вейвлет та утворено набір функцій (2), то функція

$$W_{\psi}(a,b) = \langle s(t), \Psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad a \neq 0. \quad (3)$$

є **прямим неперервним вейвлет-перетворенням** неперервної функції $s(t)$ по відношенню до материнської функції $\psi(t)$. Вейвлет-перетворення $W_{\psi}(a,b)$ є неперервною функцією двох дійсних змінних: значень масштабу $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ та зміщення $b \in \mathbb{R}$.

Згідно з теоремою Кальдерона, Гросмана і Морле [3], якщо умова допустимості виконується, то будь-яка функція $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ задовольняє рівностям:

$$s(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\psi}(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2}, \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_{\psi}(a,b)|^2 db \frac{da}{a^2}, \quad (5)$$

а отже, пряме НВП має обернене і є перетворенням зі збереженням енергії. Дуже часто на практиці обмежуються значеннями $a \geq 0$ (умова (1) задана саме для такого випадку), і нижня межа інтегрування в другому інтегралі у виразах (4), (5) буде дорівнювати нулю.

Особливий інтерес на практиці представляють методи обробки цифрових сигналів. В даній роботі надалі обмежимося розглядом лише дискретних сигналів.

2. Методика розрахунку неперервного вейвлет-перетворення дискретних сигналів

Розглянемо модифікацію виразів для НВП (3) для випадку дискретних сигналів при рівномірній дискретизації, яка запропонована у

[1]. Нехай проведена дискретизація неперервного сигналу $s(t)$ з періодом T_s с.

Для того, щоб скористатися виразами для неперервного вейвлет-перетворення, побудуємо на основі дискретного сигналу $s[n] = s(t), t = nT_s, n \in \mathbb{Z}$ неперервний сигнал $\tilde{s}(t)$, який отримаємо шляхом кусково-лінійної інтерполяції значень початкового неперервного сигналу в моменти відліків:

$$\tilde{s}(t) = s[n], \quad t \in [nT_s, (n+1)T_s), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Підставляючи (6) в (3), отримаємо:

$$\begin{aligned} W_{\psi}(a,b)_s &= \langle \tilde{s}(t), \Psi_{a,b}(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n] \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Проаналізуємо отриманий вираз для НВП дискретних сигналів (7). НВП дискретного сигналу, представленого кусково-лінійною інтерполяцією $W_{\psi}(a,b)_s$, розраховується як сума добутоків значень сигналу в моменти відліків на інтеграл від масштабованого вейвлету, взятий в межах одного інтервалу дискретизації. Отже, обов'язковою вимогою для використання (7) для розрахунку вейвлет-коефіцієнтів є можливість обчислити такий інтеграл. Це можливо виконати точно за наявності математичного виразу для обчислення материнської функції, при цьому задача розрахунків НВП є тривіальною. Якщо виразу для материнської функції немає, то розрахунки можна виконати тільки наближено шляхом використання чисельних методів інтегрування. Зрозуміло, що обчислення інтегралу буде вимагати додаткової витрати часу.

В даній роботі пропонується альтернативна до (7) методика отримання НВП дискретних сигналів. Для її отримання використаємо представлення неперервного сигналу $s(t)$ у вигляді сукупності зміщених дельта-функцій $\delta(t)$:

$$s_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t - nT_s). \quad (8)$$

Після підстановки (8) у вираз (3) отримаємо:

$$\begin{aligned} W_{\psi}(a,b) &= \langle s_{\delta}(t), \Psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\delta}(t) \cdot \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - nT_s) \right) \cdot \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - nT_s) \cdot \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \end{aligned}$$

З урахуванням фільтруючої властивості дельта-функції можемо остаточно записати:

$$W_{\psi}(a,b)_{\delta} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_s) \cdot \psi\left(\frac{nT_s - b}{a}\right). \quad (9)$$

Отже, отримано вираз, за яким можна розрахувати вейвлет-коефіцієнти дискретного сигналу. У виразі для $W_{\psi}(a,b)_{\delta}$ використовуються лише значення відліків сигналу та значення вейвлету у моменти відліків. Розрахунки за запропонованою методикою не вимагають проведення чисельного інтегрування материнської функції, що позбавляє від необхідності додаткових обчислень.

3. Порівняння двох методик розрахунку НВП та обговорення результатів

Задачею експериментальних досліджень в даній роботі було порівняння результатів обчислень вейвлет-коефіцієнтів, отриманих за формулами (7) та (9), а також часу, який займають обчислення.

В практиці вейвлет-перетворень аналізовані сигнали мають скінченну тривалість. Для сигналу тривалості N відліків вираз (7) матиме вигляд:

$$W_{\psi}(a,b)_s = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (10)$$

а для (9) можемо записати:

$$W_{\psi}(a,b)_{\delta} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_s) \cdot \psi\left(\frac{nT_s - b}{a}\right). \quad (11)$$

Програми для обчислень за (10) та (11) реалізовані на мові технічних обчислень MatLAB. Для приблизного якісного порівняння швидкості роботи програми розрахунки проводились на трьох комп'ютерах: 1) AMD Athlon XP 2500+, частота процесора 1.833 ГГц, кеш-пам'ять 512 КБ, ОЗП 1 ГБ, тактова частота пам'яті 400 МГц (MatLAB 7.0.0.19920 (R14)) (А); 2) MacBook Intel Core 2 Duo, частота процесора 2.16 ГГц, кеш-пам'ять 4 МБ, ОЗП 4 ГБ, тактова частота пам'яті 667 МГц (MatLAB 7.6.0.324 (R2008a)) (Б); 3) Dual Core Intel Core 2 E8400, частота процесора 3 ГГц, кеш-пам'ять 6 МБ, ОЗП 2 ГБ, тактова частота пам'яті 800 МГц (MatLAB 7.0.0.19920 (R14)) (В). Програма виконувалася при сталій кількості процесів в пам'яті комп'ютера.

Було визначено три тестових сигнали однакової тривалості:

- 1) дискретна функція Морле (рис. 1.а);
- 2) функція $s(t) = 1$ (рис. 1.б);

3) ділянка сигналу електроенцефалограми (ЕЕГ) здорової людини тривалістю 10 секунд (рис. 1.в).

В якості материнської функції для аналізу всіх сигналів було обрано вейвлет Морле, значення якого розраховуються за формулою:

$$\psi(t) = \cos(5t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Масштабні коефіцієнти a було обрано в межах від 0.1 до 2 з кроком 0.1. Зміщення вейвлет-функцій в часі проводилося з кроком дискретизації по всій тривалості сигналів. Інтегрування вейвлет-функцій проводилося методом Ньютона-Котеса 4-го порядку закритого типу [4].

Результати вейвлет-перетворення з використанням інтегрування наведені на рисунку 2, а без інтегрування – на рис. 3. Витрати часу на розрахунки за двома методиками наведені в таблиці 1.

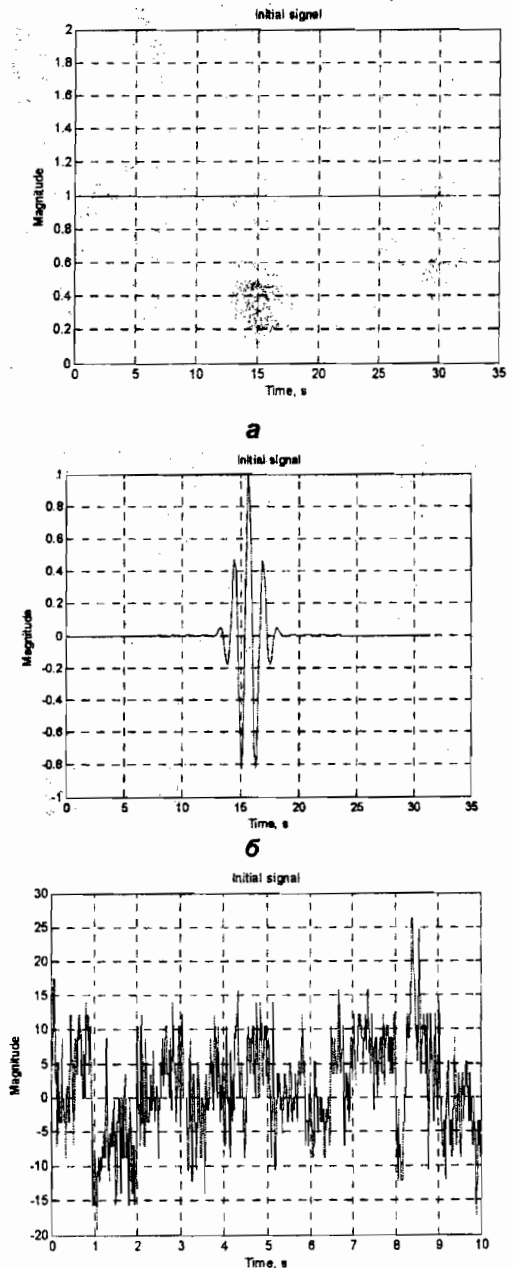


Рис. 1

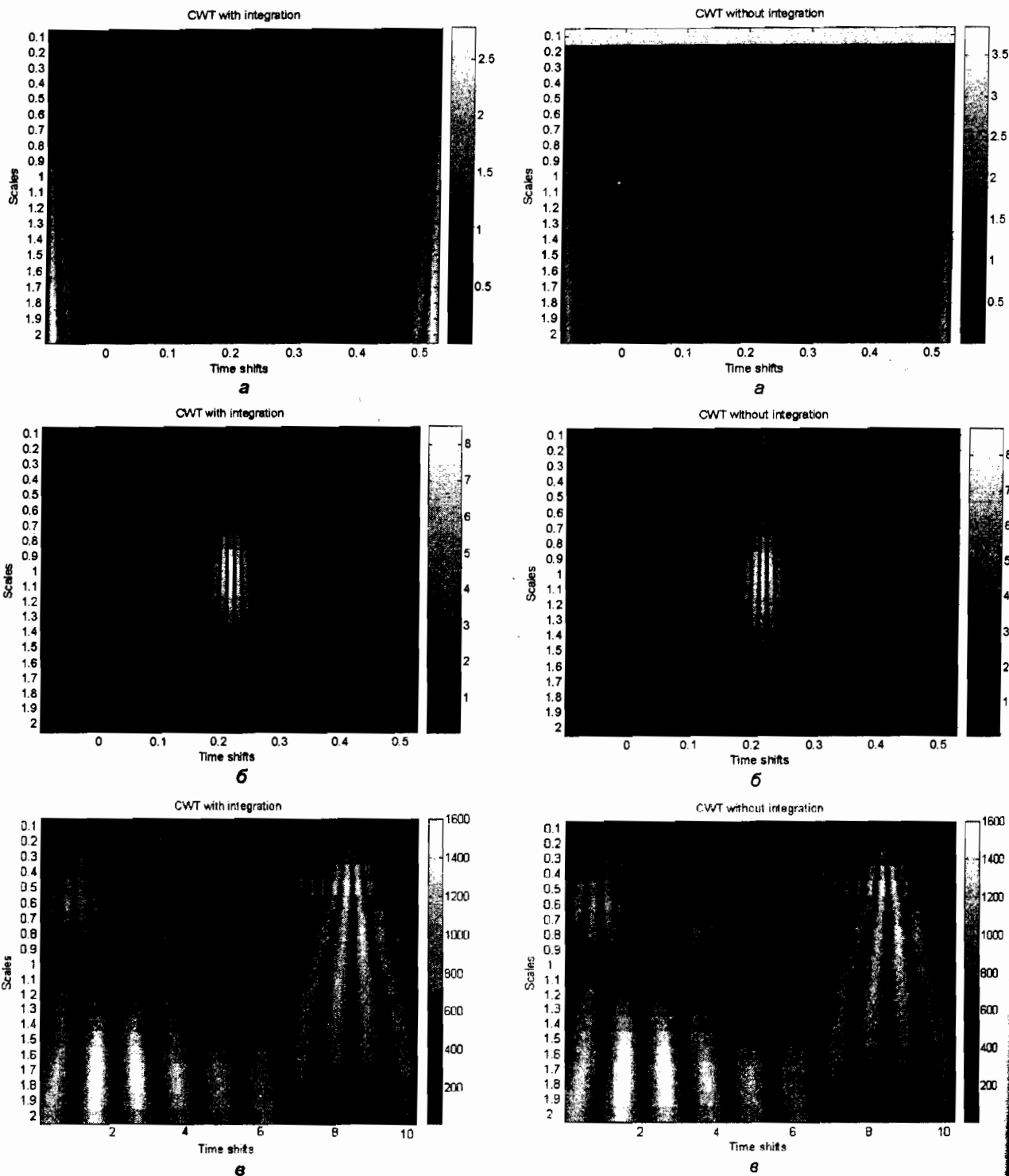


Рис. 2. Скейлограми сигналів з рис. 1, розраховані за (10)

Рис. 3. Скейлограми сигналів з рис. 1, розраховані за (11)

Таблиця 1.

Тривалість розрахунків		А, с	Б, с	В, с
Стала функція	з інтегруванням,	349,656	486,560	104,4370
	без інтегрування	1,563	0,789	0,5
Вейвлет Морле	з інтегруванням	342,375	501,371	104,1100
	без інтегрування	1,453	0,860	0,5
ЕЕГ здорової людини	з інтегруванням	19620	33149,873	6895,0
	без інтегрування	59,375	32,330	23,5150

Проаналізуємо отримані результати. Оскільки метою даної роботи якісне порівняння двох методик розрахунку, зосередимось саме на питаннях відмінності у результатах скейлограмах однакових сигналів, що розраховані за різними методиками.

З теорії НВП відомо, що скейлограма сигналу $s(t) = 1$ повинна бути нульовою для будь-яких масштабів і зміщень. Це є наслідком виконання умови (1). Отже, скейлограми на рис. 2.а і 3.а дають нам відомості лише про те, як на результати розрахунків НВП за обома методиками будуть впливати крайові ефекти. в ідеальному випадку скейлограма повинна містити лише нулі. Не вдаючись у подробицях питання зменшення похибок розрахунків коефіцієнтів на краях інтервалу, можна зробити якісний висновок, що похибки на краях мають загалом однаковий характер. Оцінка крайових ефектів та методи зменшення похибок на краях потребують додаткових досліджень та мають бути предметом окремої роботи.

Аналіз рисунків 2.б і 3.б дозволяє оцінити, наскільки якісним є визначення часового положення локалізованого в часі сигналу. Додатковою перевагою обрання в якості тестового сигналу функції Морле є те, що ідеальним результатом при аналізі з такою самою материнською функцією є максимальний коефіцієнт розкладу в момент часу, в якому розташовано саму функцію Морле. Видно, що результат відповідає очікуваному, причому і діапазони значень вейвлет-коефіцієнтів, і характер вейвлет-спектру є однаковими для двох методик розрахунку.

Для реального сигналу ЕЕГ вейвлет-скейлограми є практично ідентичними. На рис. 4 наведено різниці в значеннях масштабних коефіцієнтів. Різниця між коефіцієнтами складає 0.058 ± 58.91 , максимальна величина коефіцієнтів дорівнює 1554.1.

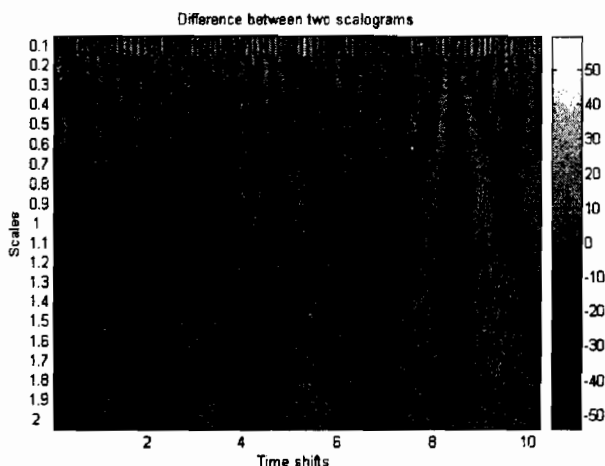


Рис. 4

Отже, можна зробити загальний висновок, що результати розрахунків коефіцієнтів НВП з використанням та без використання інтегрування загалом достатньо близькі один до одного.

З таблиці видно, що для всіх сигналів витрати часу на розрахунки неперервного вейвлет-перетворення є набагато меншими при використанні запропонованої в даній роботі методики, що не потребує інтегрування. По результатам обчислень на комп'ютерах різної конфігурації розрахунок НВП з обчисленням інтегралів від вейвлетів займає в середньому в 413,9 разів більше часу. Можна зробити висновок, що використання запропонованої методики обчислення коефіцієнтів неперервного вейвлет-перетворення дискретних сигналів, яке не вимагає інтегрування вейвлет-функції, суттєво знижує часові затрати на розрахунки.

Задачею подальших досліджень в цьому напрямі може бути розробка та удосконалення методик позбавлення від крайових ефектів при розрахунках НВП, оптимізація алгоритмів розрахунків, використання більш точних методик оцінки машинних витрат на розрахунки та більш точне оцінювання похибок обох методик.

Висновки

В роботі запропоновано нову методику обчислення неперервного вейвлет-перетворення для аналізу дискретних сигналів, перевагою якого є відсутність необхідності проведення чисельного інтегрування вейвлет-функцій, за якими ведеться розклад сигналу. Експериментальні дослідження по аналізу тестових і реальних сигналів показали, що запропонована методика дає вигоду у часі на розрахунок в середньому у 413,9 разів, причому скейлограми, отримані з використанням та без використання інтегрування загалом достатньо близькі одна до одної.

Література

1. *Переберин А.В.* О систематизации вейвлет-преобразований / А.В. Переберин // Вычислительная математика и программирование. – 2001. – т.2. – С. 15 – 40.
2. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с. – ISBN 5-93972-044-7.
3. *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов / С. Малла. – М. : Мир, 2005. – 671 с. – ISBN 5-03-003691-1.
4. *Прокопенко Ю.В.* Обчислювальна математика: навч. посіб. / Ю. В. Прокопенко, Д. Д. Татарчук, В. А. Казміренко. – К. : ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2003. – 120 с.