519.21(075.8)
А.О. Попов

Побудова материнських вейвлет-функцій методом власних векторів

Предложен новый метод построения материнских вейвлет-функций для произвольных заранее определенных классов сигналов на основе метода собственных векторов.

The new method for constructing the mother wavelet functions for arbitrary predefined signal classes using the eigenvectors' approach is proposed.

Вступ

Різні види вейвлет-перетворень з подальшим аналізом отриманого спектру є одним із найбільш розповсюджених методів часової локалізації елементів заданої форми у сигналах. В результаті аналізу публікацій, присвячених вейвлет-аналізу сигналів, можна зробити обґрунтований висновок, що для аналізу сигналів певного виду з певною метою одні вейвлети підходять краще, ніж інші, внаслідок чого всі родини стандартних вейвлет-функцій мають поширення у прикладних областях. Результати багатьох досліджень показують, що вибір материнської вейвлет-функції суттєво впливає на результат аналізу. Серед дослідників, що працюють в сфері прикладного вейвлет-аналізу, все більше розповсюджується думка, що навіть за високої якості роботи вейвлетів у різних галуззях аналізу сигналів, не завжди задовільним є використання наявних стандартних вейвлет-родин (вейвлети Добеші, Мейера, Хаара, Коіфмана та т.і.) [1–6].

Це, зокрема, стосується задач детектування, класифікації та розпізнавання, аналізу та кодування багатомірних сигналів зі значною просторовою та часовою варіабельністю, прикладом яких є сигнал електроенцефалограми. Для детектування сигналів за допомогою вейвлет-перетворення необхідно, щоб адаптований вейвлет був схожий на аналізований сигнал, що призведе до більш гострого та високого піку у масштабно-часовій площині навіть за присутності шуму в порівнянні з іншими вейвлетами [7]. У випадку, коли для прийнятної класифікації необхідним стає велике число ознак, а значення параметрів класів близькі, стає недостатнім використання стандартних вейвлет-функцій, і на перший план стане необхідність розробки методів створення нових вейвлет-функцій, адаптованих до потреб аналіза, використання яких дозволить покращити якість класифікації.

Мета даної роботи - розробка та обґрунтування нового метода створення адаптивних материнських вейвлет-функцій для довільного класу схожих сигналів. Для цього необхідно вирішити такі задачі:

- дослідити теоретичні основи вейвлет-перетворення;
- зробити огляд існуючих методів побудови адаптивних вейвлетів;
- визначити переваги та недоліки існуючих методів та знайти можливі шляхи їх усунення;
- розробити метод побудови адаптивних материнських вейвлет-функцій.

Класифікація вейвлет-перетворень

Новий інструмент для перетворень та аналізу – вейвлет-перетворення - введене в теорію сигналів у 1984 році геофізиком Жаном Морле та математиком Александром Гросманом, які започаткували напрямок розкладу сигналів за допомогою фреймів. З того часу "вейвлетний" підхід успішно розповсюдився у чисельні напрямки аналізу сигналів – знешумлення, субсмугова фільтрація, кодування, маркування та стиснення багатомірних сигналів, детектування сингулярностей, розпізнавання образів.

Загальноприйняте класичне визначення вейвлет-перетворення дала математик Інгрід Добеші у роботі "Десять лекцій про вейвлети": "Вейвлет-перетворення - інструмент, що розбиває данні, або функції, або оператори на складові з різними частотами, кожна з яких потім досліджується із роздільною здатністю, підібраною відповідною до її масштабу" [8].

Всі перетворення сигналів мають на меті представлення аналізованого сигналу $f(t)$ у вигляді функціонального ряду – зваженої скінченої або безкінечної суми деяких складових:

$$f(t) = \sum_n a_n \xi_n(t), \qquad (1)$$

де a_n – коефіцієнт розкладу, який відповідає вкладу відповідної складової у сигнал; ξ_n – елемент з деякого переповненого набору або базису функцій, який може бути ортогональним, напівортогональним або неортогональним.

У випадку вейвлет-розкладу в залежності від властивостей функцій ξ_n для подання (1) можна виділити такі галуззі у вейвлет-перетвореннях:

- неперервне вейвлет-перетворення (неперервних та дискретних сигналів);
- неортогональне дискретне вейвлет-перетворення (фрейми, діадне вейвлет-перетворення);
- ортогональні вейвлет-перетворення (кратно масштабний аналіз простору, ортогональні вейвлети з компактним носієм, біортогональні базиси вейвлетів, вейвлет-пакети та вейвлети на інтервалі).

В даній роботі зосередимось на проблемі розробки метода побудови вейвлет-функцій для проведення неперервного вейвлет-перетворення.

Неперервне вейвлет-перетворення

Якщо існує деяка функція $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ (де $L^2(\mathbb{R})$ – гільбертовий простір вимірних за Лебегом інтегровних з квадратом функції однієї дійсної змінної), яка задовольняє умову допустимості:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \qquad (2)$$

де $\hat{\psi}(\omega)$ – перетворення Фурьє для функції $\psi(t)$, то $\psi(t)$ базисний вейвлет або материнська вейвлет-функція. Задаючись параметром масштабу $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ та зсуву $b \in \mathbb{R}$ за правилом:

$$\psi_{a,b}(t) \equiv |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \tag{3}$$

можна отримати набір вейвлет-функцій $\{\psi_{a,b}(t)\}$, що є масштабованими (розтягнутими або стиснутими в залежності від величини a) та зміщеними (по аргументу в залежності від величини b) копіями єдиної породжуючої материнської функції $\psi(t)$. Сама материнська вейвлет-функція також елемент цього набору: $\psi(t) = \psi_{1,0}(t)$.

Неперервне вейвлет-перетворення (НВП) функції $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ – це функція двох змінних:

$$\begin{aligned} Wf_\psi(a,b) &\equiv \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*_{a,b}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\psi^*_{a,b}$ – комплексно-спряжена функція;

$a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$.

З (4) видно, що НВП функції є її розкладом за всіма можливими стисненнями та зміщеннями однієї базової функції. НВП відображає функцію однієї змінної $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ у функцію двох змінних:

$$Wf_\psi(a,b) \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Якщо для материнської вейвлет-функції виконується умова допустимості (2), то оператор вейвлет-перетворення є неперервним та обмеженим, і існує обернене неперервне вейвлет перетворення:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Wf_\psi(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{da\,db}{a^2}, \tag{5}$$

яке забезпечує точне відновлення початкової функції з її вейвлет-спектру. Доведено, що в разі, коли виконується умова допустимості, функції можуть характеризуватися своїми вейвлет-коефіцієнтами, тобто виконується умова:

$$\langle f_1(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \langle f_2(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \Leftrightarrow f_1(t) \equiv f_2(t), \tag{6}$$

а також можливе чисельно стійке відновлення функції з її вейвлет-коефіцієнтів, тобто коли послідовності значень $\{\langle f_1(t), \psi_{a,b}(t) \rangle\}$ та $\{\langle f_2(t), \psi_{a,b}(t) \rangle\}$ "близькі", то і самі функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$ також "близькі" в деякому сенсі.

Вимоги до материнських вейвлет-функцій

Існують дві обов'язкові вимоги, яким повинна задовольняти материнська вейвлет-функція, з допомогою якої виконується частотно-часове представлення сигналу [8]:

1. функція $\psi(t)$ повинна бути суттєво спадаючою на нескінченності:

$$|\psi(t)| < C(1+|t|)^{-(1+\varepsilon)}; \tag{7}$$

2. функція $\psi(t)$ повинна мати певну гладкість. Гладкість можна оцінити за спадом фурьє-образу мАтеринської вейвлет-функції:

$$|\hat{\psi}(\omega)| < C(1+|\omega|)^{-(1+\varepsilon)}, \tag{8}$$

або за кількістю нульових моментів

Вимоги 1 та 2 об'єднують, висуваючи до вейвлет-функції вимогу мати компактний носій у часовій та частотній областях, тобто якнайменшу замкнену область визначення, поза якою функція тотожно дорівнює нулю. Від величини носія залежить швидкість збіжності ряду розкладу аналізованої функції за вейвлетами та концентрація енергії вейвлет-атомів у частотно-часовому просторі.

Із виконання умови допустимості слідує вимога:

$$|\hat{\psi}(0)|^2 = 0. \tag{9}$$

Вираз (9) еквівалент виконання в часовій області умови:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0. \tag{10}$$

З (7) та (10) слідує, що материнська вейвлет-функція повинна мати коливний характер на деякому компактному носії.

Методи побудови материнських вейвлетів

Тривіальним методом отримання адаптивної вейвлет-функції або вейвлет-базису є вибір їх за максимальним значенням певного критерію оптимальності з числа вже існуючих вейвлетів, створених для інших цілей. Для досягнення цієї мети можуть використовуватися стандартні методики вибору оптимального подання сигналів у переповнених словниках функцій [9, 10]. Наприклад, у роботі [11] адаптивний базис вейвлет-пакетів для представлення зображень відбитків пальців обирається за допомогою алгоритму вибору найкращого базису, а розподіл енергії за масштабами використовується як параметр для ідентифікації.

Також проводять розробки власних критеріїв вибору із базису. Як спеціальні критерії використовують величину проекцій сигналу на функції у вже існуючому базисі [12], проекцій на функції у базисі апроксимуючого підпростору [13], а також величину дисперсії аналізованого сигналу [14]. У роботі [15] автори пропонують швидкий алгоритм для вибору базисних функцій на основі використання ланцюгів Маркова, який дозволяє зі зниженими витратами будувати оптимальні вейвлет-пакети довільної геометрії. Автори [16] пропонують методику отримання ортогонального базису вейвлетів з компактним носієм, використання якого мінімізує середньоквадратичну похибку апроксимації при використанні для відновлення із спектру кінцевого числа вейвлет-коефіцієнтів.

В разі наявності апріорної інформації про досліджуваний сигнал, використання її для побудови материнського вейвлета або базису розкладу може спростити пошук оптимального представлення, прискорити збіжність узагальненого ряду Фурьє та зменшити витрати на обчислення. В такому підході до побудови вейвлета можна окремо виділити групу методик, які використовують статистичні характеристикки [7, 17–19].

У роботі [20] зазначається, що залучення біологічних моделей до побудови методів та алгоритмів обробки та аналізу сигналів живих організмів покращить застосування цих засобів для дослідження від-

повідних сигналів. Зокрема, автори звертають увагу на те, що чим тихіше говорять люди, тим повільніше вони розмовляють. Цей факт знайшов експериментальне підтвердження у біологічних дослідженнях та відображений у нелінійній моделі слуху людини. Ще однією роботою, де для адаптації вейвлет-аналізу до аналізованого сигналу використовуються біологічні міркування, є [21], в якій була поставлена задача розробки вейвлет-фільтра, який є узгодженим з тією нейрональною активністю, що лежить в основі певної нейроелектричної події.

Метод побудови материнського вейвлета для класу сигналів

В даній роботі пропонується новий метод побудови материнського вейвлета, пристосованого до детектування класу сигналів, який представлений деякою вибіркою.

Нехай існує набір сигналів, які зареєстровані та збережені у базі даних. Нехай для цього набору відомо, що вони відносяться до одного класу K_1. До цього класу можуть також відноситися інші сигнали, які не входять у початковий набір. Віднесення певного сигналу до класу K_1 виконується дослідником виходячи з власного досвіду, знань, інтуїції та контекстної інформації.

Задача пошуку засобами вейвлет-аналізу сигналів, належних до классу K_1, полягає в тому, щоб отримати таку материнську вейвлет-функцію, щоб коефіцієнти розкладу аналізованого сигналу з її використанням чітко відображали присутність сигналу, схожого на сигнали з класу K_1. Можна очікувати, що для такого материнського вейвлета кореляція між ним і сигналом буде максимальною, і коефіцієнти розкладу сигналу по базисним функціям для певних масштабів розтягу та стиснення будуть більшими за інші.

Можна припустити, що вірна класифікація будь-якого нового сигналу, буде проведена тим якісніше, чим більше виражені у нього ознаки, спільні для представників даного класу, і одночасно чим менше виражені "індивідуальні ознаки", притаманні кожному елементу класу окремо. Виходячи з аналізу методу вейвлет-перетворень, можна зробити висновок, що материнська вейвлет-функція повинна бути корельована з сигналами класу K_1 зі значним коефіцієнтом кореляції. При цьому всі функції в базисному наборі (3) будуть схожі на елементи класу K_1. Тому першим кроком до побудови адаптивної материнської вервлет-функції є знаходження функції, яка б максимально корелювала з всіма представниками класу сигналів.

Відомо, що існує оптимальне в середньоквадратичному розумінні ортогональне перетворення сигналу – перетворення Карунена-Лоева (перетворення Хоттелінга) [22–26]. Результатом перетворення є некорельовані коефіцієнти розкладу для корельованих сигналів, а також є залежним від сигналу, який використовується для отримання базисних векторів. Пропонується використати ці властивості перетворення Карунена-Лоева для побудови на основі метода власних векторів схожого перстворення, корисного для задачі побудови вейвлетів.

Нехай в класі K_1 маємо M сигналів тривалістю T_{K_1}, зареєстрованих з частотою дискретизації F_s Гц, які представлені своїми N цифровими відліками. Їх можна розмістити по рядках матриці:

$$X_{K_1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ & \cdots & \cdots & \\ x_{M1} & x_{M2} & \cdots & x_{MN} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

де $X_i = [x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{iN}]$ – вектор-рядок відліків одного сигналу, $i = \overline{1,M}$.

Матрицю X_{K_1} (11) будемо надалі називати ***матрицею класу*** K_1 сигналів. Вектори X_i розглядаються як дискретні функції номера елементу $X_i \in L^2(\mathbb{Z}^N)$, оскільки виміряний сигнал має скінчену енергію.

Для такої матриці необхідно отримати характеристичний сигнал, яким можна надалі користуватися як репрезентативним для даного класу. Сигнали – рядки матриці класу – можна розглядати як реалізації деякого випадкового процесу. Для матриці класу (11) за формулою:

$$c_{ij} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} x_{ki} x_{kj}, \quad (12)$$

розраховують елементи ***матриці усереднених кореляцій***:

$$C_{K_1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ & \cdots & \cdots & \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Існує ортонормований базис із власних векторів цієї матриці [27].

Для отримання цього базису потрібно спочатку розв'язати характеристичне рівняння матриці (13):

$$\det(C_{K_1} - \lambda I) = 0, \quad (14)$$

де λ – власні значення, I – одинична матриця.

Отримані розв'язки $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$ підставляються у рівняння:

$$C_{K_1} v_k = \lambda_k v_k, \quad (15)$$

після розв'язання якого отримують ортонормований набір $\{v_k\}_{k=1}^{N}$ власних векторів матриці усереднених кореляцій.

За аналогією з розкладом Карунена-Лоева можна проводити розклад будь-якого сигналу виду (1) за допомогою ортонормованого базису векторів $\{v_k\}_{k=1}^{N}$ [28].

Відомо, що власні значення $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$ для матриць виду (13) є дійсними числами, тому їх можна проранжувати [27]. Оберемо з отриманого набору власне значення за правилом:

$$\ell_{K_1} = \max_{k=\overline{1,N}}\left(|\lambda_k|\right), \quad (16)$$

яке буде надалі називатися ***головне власне значення класу*** K_1, маючи на увазі максимальне за модулем власне значення матриці усереднених кореляцій для класу K_1. Після підстановки ℓ_{K_1} у отримаємо відповідний власний вектор матриці усереднених кореляцій:

$$C_{K_1}\eta_{K_1} = \ell_{K_1}\eta_{K_1}. \quad (17)$$

Вектор η_{K_1} надалі буде називатися ***головним власним вектором класу*** K_1, маючи на увазі власний вектор, який відповідає максимальному за

модулем власному значенню матриці усереднених кореляцій для матриці класу K_1.

Вектор η_{K_1} можна розглядати як дійсну дискретну функцію номеру елементу вектора у N – мірному просторі: $\eta_{K_1} \in L^2(\mathbb{Z}^N)$.

У випадку, що розглядається, вектори в матриці класу K_1 є близькими та "схожими" сигналами, бо вони віднесені до одного класу сигналів. Оскільки ці сигнали належать до одного класу, то їх можна вважати проявами деякого детермінованого процесу, на який накладений певний шум (мультиплікативний або адитивний, з апріорі невідомими параметрами). Для такого набору сигналів гіпереліпс векторів буде суттєво більше витягнутий в невеликій кількості напрямків N - мірного гіперпростору, і відносно значний вклад у подання сигналу в базисі власних векторів матриці усереднених кореляцій даватимуть лише компоненти розкладу в напрямках цих кількох власних векторів. Чим більше схожі вектори в матриці класу, тим меншим буде "розмиття" хмари векторів класу у просторі, і тим більш явно будуть виділятися окремі вісі, проекції на які вносять найбільший вклад у представлення кожного вектора класу.

В граничному випадку гіпереліпс буде витягнутим у одному напрямку і основну інформацію про кожний вектор в матриці класу нестиме проекція на один вектор, який відповідає головному напрямку і був названий вище головним вектором.

Експериментальним доказом наведеного вище можна вважати один з результатів роботи [29], де показано, що зміна превалюючого характеру електрограми багатоканального сигналу ЕЕГ достовірно відтворюється у головному векторі матриці усереднених кореляцій при появі у сигналі викликаного потенціалу мозку. Показано також [28,30], що при розкладі сигналу у базисі власних векторів матриць усереднених кореляцій, коефіцієнт розкладу, який відповідає проекції сигналу на головний власний вектор, максимальний, тобто кореляція між сигналом та цим вектором велика. З цього можна зробити висновок, що головний вектор несе найбільшу інформацію про сигнал та великою мірою характеризує його властивості. Це означає, що загальний характер поводження сигналу найбільшою мірою відображається саме у головному векторі. Тому зміни цього вектора найсуттєвіше відображають превалюючі зміни, які відбуваються у сигналі.

Таким чином, головний власний вектор класу K_1 є таким, що відображає превалюючу поведінку сигналів у матриці, і коефіцієнт кореляції між цим вектором та сигналами може характеризувати спільні параметри сигналів у матриці виду (11) параметрами цього вектора.

Тому можна зробити висновок про те, що отримана за допомогою (14), (16), (17) функція є суттєво корельованою з кожним представником класу K_1. Вона буде використана в подальшому для побудови материнської вейвлет-функції.

Після отримання головного вектора матриці усереднених кореляцій, який відображає властивості сигналів, зібраних у матриці класу, на його основі необхідно побудувати материнську вейвлет-функцію.

Теорема 1. Нехай маємо головний власний вектор $\eta_{K_1}(n) = [\eta_{K_1}(1), \eta_{K_1}(2), \ldots, \eta_{K_1}(N)]$, отриманий для матриці класу K_1 (11) за (14), (16), (17), який являє собою функцію дискретного аргументу (відліку часу). Тоді функція виду

$$\Upsilon_{K_1}(n) = \begin{cases} \eta_{K_1}(n) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_{K_1}(i), & n = [1, N], \\ 0, & n = (-\infty, 0] \cup [N+1, \infty), \end{cases} \quad (18)$$

є материнським вейвлетом.

Доведення. Для того, щоб довести дану теорему необхідно довести, що функція (18) задовольняє таким трьом вимогам:

- компактність носія у часовій області (7);
- компактність носія у частотній області (8);
- нульове середнє значення (10).

Доведемо виконання цих трьох вимог.

1. Функція $\Upsilon_{K_1}(n)$ (18) є визначеною лише для тих моментів часу, для яких відомі значення відліків ЕК у матриці класу K_1, тому вона має компактний носій у часовій області.

2. Згідно з лемою Рімана-Лебега [31], якщо функція є такою, що виконується умова

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty, \quad (19)$$

то її перетворення Фурьє задовольняє умовам: $\hat{f}(\omega) \to 0$ при $\omega \to \pm\infty$.

Функція $\eta_{K_1}(n)$, на основі якої побудовано $\Upsilon_{K_1}(n)$ є дискретною функцією зі скінченною енергією $\eta_{K_1} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ та має компактний носій у часовій області. Умову (19) можна для цього випадку переписати у вигляді: $\sum_{n=1}^{N} |\eta_{K_1}(n)| < \infty$, що виконується за визначенням $\eta_{K_1}(n)$, тому умови леми Рімана-Лебега виконуються. Також функція $\Upsilon_{K_1}(n)$ задовольняє умовам Діріхле [32]: є кусково-монотонною, кусково-неперервною та обмеженою за визначенням. Тому її ряд Фурьє існує та збігається до самої функції. З іншого боку, функція $\eta_{K_1}(n)$ репрезентативний елемент для сигналів із класу K_1 (11), які дискретизовані з частотою F_s. Тому, згідно теореми Уіттакера-Шеннона-Котельникова [33], в спектрі такого дискретного сигналу немає гармонік з частотою вище $\frac{F_s}{2}$. Тому спектр $\Upsilon_{K_1}(n)$ є обмеженим.

3. Функція $\Upsilon_{K_1}(n)$ має нульове середнє значення за визначенням.

Теорема доведена ■

Отже, отримано метод для побудови материнського вейвлета на основі головного власного вектора для класу сигналів K_1.

Висновки

В роботі було запропоновано новий метод побудови материнських вейвлет-функцій для класу сигналів на основі використання власних векторів матриці усереднених кореляцій для класу сигналів та викладено теоретичні основи цього метода. Доведено, що отримані за таким методом функції задовольняють вимоги, які висуваються для материнських вейвлетів, що дозволяє використовувати ці функції для неперервного вейвлет-аналізу сигналів різної природи.

Подальші дослідження будуть направлені на розвиток теоретичних уявлень щодо застосовності роз-

робленого методу та на експериментальну перевірку ефективності його застосування до побудови материнських вейвлетів для класів сигналів біологічного походження.

Література

1. Переберин А.В. О систематизации вейвлет-преобразований // Вычислительная математика и программирование. – 2001. – т.2 – С. 15 – 40.
2. Vetterly M. Wavelets, approximation and compression // IEEE Signal processing magazine. – 2001. – vol. 18, № 5. – P. 59 – 73.
3. Mallat S., Hwang W.L. Singularity detection and processing with wavelets – Technical report, Courant institute of mathematical sciences, New York University, New York, 1991. – 62 p.
4. DeVore R., Lucier B.J. Wavelets // Acta Numerica, Cambridge University Press. – 1992. – v. 1 – P. 1–56.
5. Теорія вейвлетів з елементами фрактального аналізу / Геранін В.О., Писаренко Л.Д., Рущицький Я.Я. : Науково-методичне видання. – Київ: ВПФ УкрІНТЕІ, 2002. – 364 с.
6. Фесечко В.О. Методи перетворення сигналів: Навч. посіб. – К.: ІВЦ "Видавництво "Політехніка"", 2005. – 128 с.
7. Chapa J.O., Rao R.M. Algorithms for designing wavelets to match a specified signal // IEEE Transactions on signal processing. – 2000. – vol. 48, №12. – P. 3395–3406.
8. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
9. Mallat S., Zhang Zh. Matching pursuit with time-frequency dictionaries // IEEE Transactions on signal processing. – 1993. – vol. 41, №12. – P. 3397–3415.
10. Chen S.S., Donoho D.L., Saunders M.A. Atomic decomposition by basis pursuit // SIAM Review. – 2001. – vol. 43, №129. – P. 1–29.
11. Huang K., Aviyente S. Choosing best basis in wavelet packets for fingerprint matching // Proceedings of International Conference on Image Processing ICIP '04. – 24-27 October, 2004. – vol.2. – P. 1249–1252.
12. Aldroubi A., Unser M. Families of multiresolution and wavelet spaces with optimal properties // Numerical Function Analysis. – 1993. – vol.14, № 5-6. – P. 417–446.
13. Shi G., Ding A., Jiao L. A new approach for constructing match wavelet to signal detection // Proceedings of the International Conference on Communications, Circuits and Systems. – 27-29 June, 2004. – vol.2 – P. 738–741.
14. Ghamry N.A.E., Elsimary H.A., Habib S.E.-D. Signal compression using a new adaptive wavelet technique // Proceedings of the 14th International Conference on Microelectronics. – 11-13 December, 2002. – P. 169– 171.
15. Rajpoot N.M. et al. Adaptive wavelet packet basis selection for zerotree image coding // IEEE Transactions on Image Processing. – 2003. – vol. 12, №12. – P. 1460-1472.
16. Zhang J.-K. et al. Efficient design of oprthonormal wavelet bases for signal representation // IEEE Transactions on signal processing. – 2004. – vol. 52, № 7. – P. 1983–1996.
17. Chen Z., Erdol N., Bao F. Adaptive filters based on the best matched wavelet tree // Proceedings of the Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics. – 15-18 Octorber, 1995. – P. 267–270.
18. Gupta A., Joshi S.D., Prasad S. A novel method of estimating statistically matched wavelet: Part 1-Compactly supported wavelet // Journal of Systemics, Cybernetics and Informatics. – 2003. – vol. 2, №5. – P. 433–438.
19. Gupta A., Joshi S.D., Prasad S. A new approach for estimation of statistically matched wavelet // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2005. – vol.53, №5. – P. 1778–1793.
20. Yao J., Zhang Y.-T. Bionic wavelet transform: a new time-frequency method based on an auditory model // IEEE Transactions on biomediacl engineering. – 2001. – vol. 48, №8. – P. 856–863.
21. Glassman E.L. A wavelet-like filter based on neuron action potential for analysis of human scalp electroencephalographs // IEEE Transactions on biomedical engineering. – 2005. – vol. 52, №11. – P. 1851–1862.
22. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональныне преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер. с англ. / Под ред. И.Б. Фоменко. – М.: Связь, 1980. – 248 с.
23. Davila C.E. Blind adaptive estimation of KLT basis vectors. / IEEE Transactions on signal processing. – 2001. – vol. 49, № 7. – P. 1364 – 1369.
24. Wavelet analysis and signal processing. R.R. Coifman, Y. Meyer, V. Wickerhauser / Wavelets and their applications, "Jones and Bartlett", Boston, 1992. – pp. 153 – 178.
25. Kraut S. et al. A generalized Karhunen-Loeve basis for efficient estimation of tropospheric refractivity using radar clutter / IEEE Transactions on signal processing. – 2004. – vol. 52, № 1. – P. 48 – 60.
26. Fukunaga K. Introduction to statistical pattern recognition, 2nd ed., San Diego, CA, 1990.
27. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М: Наука, 1974. – 296 с.
28. Фесечко В.А., Попов А.О. Часова локалізація комплексів коливань у електроенцефалограмі // Электроника и связь. – 2004. – №21. – С. 51 – 55.
29. Fesechko V.A. Eigenvector identification method for processing evoked potentials / «Информационные технологии и программно – аппаратные средства в медицине, биологии и экологии»: Материалы семинара; Киев, 26 – 30 января 1998 г. – К.: Мединформ, 1998, с.45 – 52.
30. Фесечко В.О., Попов А.О., Гутаревич В.В. Новий адаптивний метод обробки електроенцефалограм // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2004. – № 4. – С. 34 – 39.
31. Чуи Ч. Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. – М.:Мир, 2001. – 412 с.
32. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 408 с.
33. Jerry A.J. The Shannon sampling theorem – Its various extensions and applications: A tutorial review // Proceedings of IEEE. – 1977. – vol. 65, № 11. – P. 53 – 89.