Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Факультет електроніки
Кафедра фізичної та біомедичної електроніки

А.О. Попов, О.К. Боділовський, І.П. Голубєва, М.А. Жуков,
Є.С. Карплюк, І.Е. Крашений, О.Ю. Панічев, Г.С. Порєва

Теорія сигналів

Методичні вказівки до практичних занять
для студентів напряму
6.050801 – мікро- та наноелектроніка

Київ – 2014

Попов, А.О. Теорія сигналів: методичні вказівки до практичних занять для студентів напряму 6.050801 – мікро- та наноелектроніка / А.О. Попов, О.К. Боділовський, І.П. Голубєва, М.А. Жуков, Є.С. Карплюк, І.Е. Крашений, О.Ю. Панічев, Г.С. Порєва. – К. : НТУУ «КПІ», 2014. – 64 с.

Рекомендовано Вченою радою
факультету електроніки НТУУ «КПІ»
(протокол № 05/14 від 26 травня 2014 р.)

Затверджено на засіданні
кафедри фізичної та біомедичної електроніки
(протокол № 21 від 21 травня 2014 р.)

Навчально-методичне видання

ТЕОРІЯ СИГНАЛІВ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ 6.050801 –
МІКРО- ТА НАНОЕЛЕКТРОНІКА

Укладачі:

Антон Олександрович Попов, к.т.н., доцент,
доцент кафедри фізичної та біомедичної електроніки
Олег Костянтинович Боділовський,
аспірант кафедри фізичної та біомедичної електроніки
Ірина Петрівна Голубєва, к.т.н.,
старший викладач кафедри фізичної та біомедичної електроніки
Михайло Андрійович Жуков,
аспірант кафедри фізичної та біомедичної електроніки
Євгеній Сергійович Карплюк, к.т.н.,
асистент кафедри фізичної та біомедичної електроніки
Ігор Едуардович Крашений,
аспірант кафедри фізичної та біомедичної електроніки
Олег Юрійович Панічев,
аспірант кафедри фізичної та біомедичної електроніки
Ганна Сергіївна Порєва,
асистент кафедри фізичної та біомедичної електроніки

Відповідальний
редактор *В.І. Тимофєєв*, д.т.н., проф.
Рецензент: *О.В. Борисов*, к.т.н., проф.

За редакцією укладачів

ЗМІСТ

ВСТУП

Практичні заняття призначені для закріплення теоретичного матеріалу, що розглянуто на лекціях та в ході самостійної роботи шляхом набуття навичок розв’язання практичних задач. Дані методичні вказівки призначені для допомоги студентам при підготовці до практичних занять з дисципліни «Теорія сигналів» та містять основні теоретичні відомості, приклади розв’язання типових задач і завдання для самостійного опрацювання.

Методичні вказівки охоплюють такі теми: розрахунок вихідних сигналів дискретних систем з використанням різницевих рівнянь та імпульсних характеристик, отримання базисів та коефіцієнтів розкладу сигналів, кореляційний аналіз сигналів, фільтрація дискретних сигналів. програм

Методичні вказівки видані за власні кошти авторів.

1. Розрахунок вихідних сигналів дискретних систем на основі різницевого рівняння

1.1. Основні теоретичні відомості

Для лінійних стаціонарних систем з раціональною характеристичною функцією пара «вхідний сигнал – вихідний сигнал» пов'язана лінійним різницевим рівнянням порядку N з постійними коефіцієнтами:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m],$$

де a_k та b_m – коефіцієнти рівняння;

$x[n]$ – вхідний сигнал;

$y[n]$ – вихідний сигнал.

Якщо відоме різницеве рівняння, яке описує дану систему, то можемо розрахувати значення вихідного сигналу по заданому вхідному сигналу:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y[n-k]\right).$$

Рівняння «відоме» – це значить, що відомі всі коефіцієнти рівняння a_k та b_m, тобто числа, які потрібні для проведення розрахунків за цим рівнянням.

Якщо розглянути праву частину різницевого рівняння, то видно, що для розрахунку значення поточного n-ого відліку вихідного сигналу $y[n]$, нам потрібні M відліків вхідного сигналу $x[n]$ (включаючи поточний n-ий), а також $N-1$ попередні відліки вихідного сигналу.

1.2. Приклади розв'язання типових задач

1.2.1. Розрахувати вихідний сигнал дискретної системи, заданої різницевим рівнянням $y[n] = 2x[n] - 3x[n-1] + 4x[n-3]$ *при подачі на вхід сигналу* $x[n] = [-6,5,1]$. *Побудувати графіки вхідного та вихідного сигналів.*

Відповідно до умови даної задачі маємо різницеве рівняння нерекурсивної системи, оскільки відліки вихідного сигналу залежать лише від відліків вхідного сигналу:

$$y[n] = 2x[n] - 3x[n-1] + 4x[n-3]$$

Зважаючи на те, що вхідний сигнал $x[n]$ починається з нульовогу відліку, всі його відліки з від'ємними номерами будемо вважати нульовими; також нульовими будуть відліки з номерами більше 2, отже

$$y[0]=2x[0]-3x[-1]+4x[-3]=2\cdot(-6)=-12,$$

$$y[1]=2x[1]-3x[0]+4x[-2]=2\cdot 5-3\cdot(-6)=28,$$

$$y[2]=2x[2]-3x[1]+4x[-1]=2\cdot 1-3\cdot 5=-13,$$

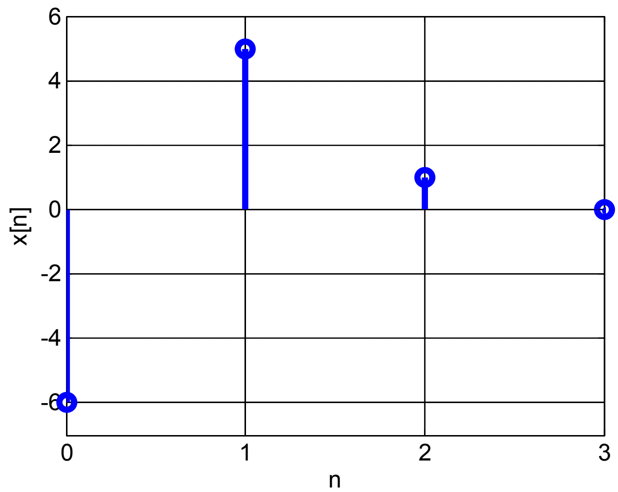
$$y[3]=2x[3]-3x[2]+4x[0]=-3\cdot 1+4\cdot(-6)=-27,$$

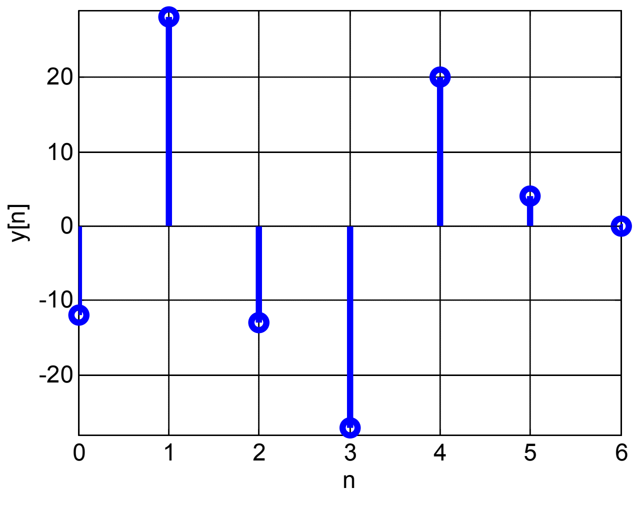
$$y[4]=2x[4]-3x[3]+4x[1]=4\cdot 5=20,$$

$$y[5]=2x[5]-3x[4]+4x[2]=4\cdot 1=4.$$

Очевидно, що $y[n]=0$ при $n>5$.

Видно, що оскільки вхідний сигнал скінченний і система нерекурсивна, то всі наступні відліки вихідного сигналу системи будуть рівними нулю, тому вихідний сигнал теж буде скінченним. Графіки вхідного та вихідного сигналів наведені на рисунках:





<u>Відповідь:</u> $y[n]=[-12,28,-13,-27,20,4]$.

1.2.2. Розрахувати перші п'ять відліків вихідного сигналу дискретної системи, заданої різницевим рівнянням $y[n]-2y[n-1]=x[n]-4x[n-1]+5x[n-3]$ *при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[-6,5,1]$. *Вважати, що система знаходиться в стані спокою. Побудувати графік.*

За даним різницевим рівнянням вихідний сигнал буде розраховуватись рекурсивно на основі поточного та попередніх відліків вхідного сигналу, а також попередніх відліків вихідного сигналу. Представимо різницеве рівняння у зручному вигляді

$$y[n]=x[n]-4x[n-1]+5x[n-3]+2y[n-1]$$

та будемо розраховувати відліки $y[n]$ по черзі:

$$n=0:\ y[0]=x[0]-4x[-1]+5x[-3]+2y[-1]$$

Відліки вхідного сигналу з від'ємними номерами будемо вважати рівними нулю, оскільки сигнал починається з відліку $x[0]$. Значення $y[-1]=0$, оскільки за умовою задачі система знаходиться в стані спокою. Отже,

$$n=0:\ y[0]=x[0]-4x[-1]+5x[-3]+2y[-1]=-6-0+0+0=-6.$$

$$n=1:\ y[1]=x[1]-4x[0]+5x[-2]+2y[0]=5-4\cdot(-6)+5\cdot 0+2\cdot(-6)=17.$$

Тут вже використовується значення $y[0]$, яке отримане на попередньому кроці розрахунків. Аналогічно будуть вестися розрахунки надалі:

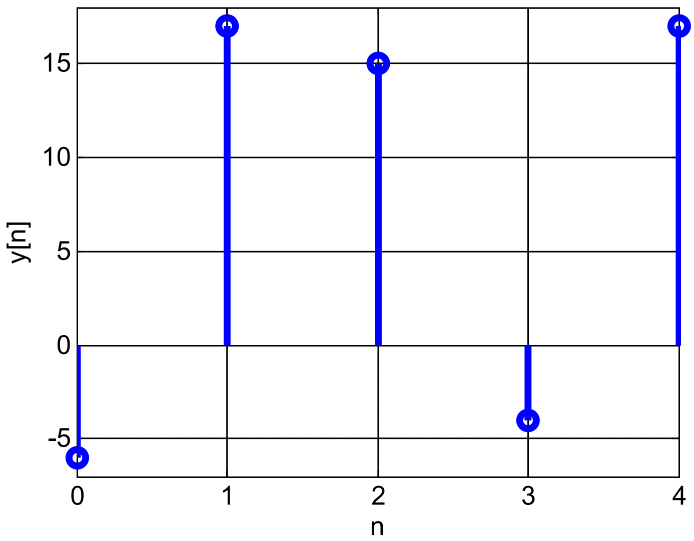
$$n=2:y[2]=x[2]-4x[1]+5x[-1]+2y[1]=1-4\cdot 5+5\cdot 0+2\cdot 17=15;$$

$$n=3:y[3]=x[3]-4x[2]+5x[0]+2y[2]=0-4\cdot 1+5\cdot(-6)+2\cdot 15=-4;$$

$$n=4:y[4]=x[4]-4x[3]+5x[1]+2y[3]=0-4\cdot 0+5\cdot 5+2\cdot(-4)=17.$$

Зауважимо, що навіть після того, як вхідний сигнал скінчився, вихідний сигнал системи все ще має ненульові значення. Розрахунки можна продовжити, видно, що вихідний сигнал такої системи буде нескінченним. Але за умовою задачі треба було визначити перші п'ять відліків, отже, задача розв'язана.

Графік вихідного сигналу наведено на рисунку



<u>Відповідь:</u> $y[n]=[-6,17,15,-4,17]$.

1.2.3. Розрахувати перші п'ять відліків вихідного сигналу дискретної системи, заданої різницевим рівнянням $y[n]-4y[n-1]+y[n-2]=x[n]-3x[n-1]$ *при подачі на вхід нульового сигналу* $x[n]=[0,0,0,0,...]$. *Система знаходиться в стані з початковими умовами:*

$y[-1]=2,$

$y[-2]=-2.$

Аналогічно до попереднього випадку, представимо різницеве рівняння у зручному для розрахунків вигляді

$$y[n]=x[n]-3x[n-1]+4y[n-1]-y[n-2]$$

та будемо розраховувати відліки $y[n]$ по черзі:

$$n=0:\ y[0]=x[0]-3x[-1]+4y[-1]-y[-2].$$

Відліки вхідного сигналу з від'ємними номерами будемо вважати рівними нулю, оскільки сигнал починається з відліку $x[0]$. Значення $y[-1]$ та $y[-2]$ ненульові, а задані у вигляді початкових умов. Отже,

$$n=0:\ y[0]=x[0]-3x[-1]+4y[-1]-y[-2]=0-0+4\cdot 2-(-2)=10.$$

$$n=1:\ y[1]=x[1]-3x[0]+4y[0]-y[-1]=0-0+4\cdot 10-2=18.$$

Тут вже використовується значення $y[0]$, яке отримане на попередньому кроці розрахунків. Аналогічно будуть вестися розрахунки надалі:

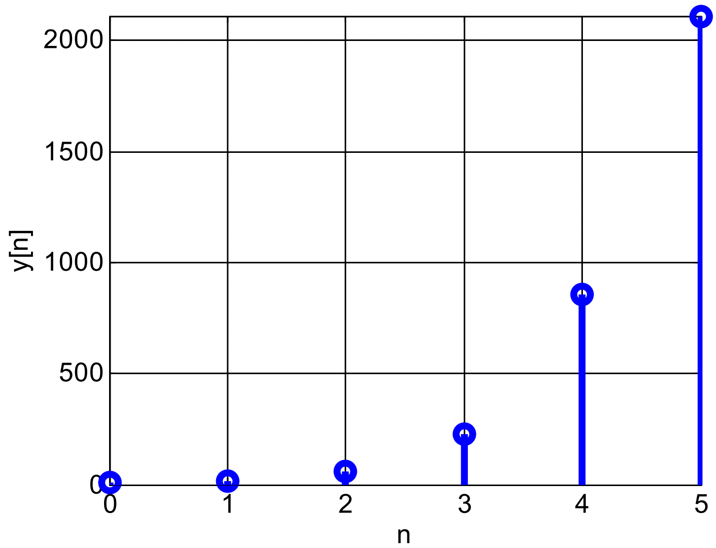
$$n=2:y[2]=x[2]-3x[1]+4y[1]-y[0]=0-0+4\cdot 18-10=62;$$

$$n=3:y[3]=x[3]-3x[2]+4y[2]-y[1]=0-0+4\cdot 62-18=230;$$

$$n=4:y[4]=x[4]-3x[3]+4y[3]-y[2]=0-0+4\cdot 230-62=858;$$

$$n=5: y[5]=x[5]-3x[4]+4y[4]-y[3]=0-0+4\cdot 858-230=2110.$$

Видно, що незважаючи на те, що на вхід системи нічого не подається, вихідний сигнал ненульовий. Це відбувається за рахунок того, що система не знаходиться в стані спокою з початку своєї роботи, оскільки початкові умови ненульові. Видно, що вихідний сигнал нескінченний і зростає. Зауважимо, що відліки вихідного сигналу залежать лише від початкових умов. Графік перших відліків вихідного сигналу наведено на рисунку



<u>Відповідь:</u> $y[n]=[10,18,62,230,858]$

1.2.4. Розрахувати всі ненульові відліки вихідного сигналу системи осереднення зі зсувом, заданої різницевим рівнянням $y[n]=\frac{1}{4}\sum_{k=-1}^{2}x[n-k]$ *при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[-6,5,1]$.

Як видно із меж додавання у сумі, вихідний сигнал даної системи усереднення зі зсувом залежить від двох попередніх відліків вхідного сигналу, одного поточного та одного майбутнього. В загальному випадку, система що працює в реальному часі не може використовувати для розрахунків майбутні відліки, оскільки вони ще невідомі. Але якщо система працює у відкладеному часі, або з сигналами, які записані в пам’ять, таке можливо.

Розрахуємо вихідний сигнал такої системи:

$$y[0]=\frac{1}{4}\sum_{k=-1}^{2}x[0-k]=\frac{1}{4}\left(x[1]+x[0]+x[-1]+x[-2]\right)=\frac{1}{4}\left(5+(-6)+0+0\right)=-\frac{1}{4},$$

$$y[1]=\frac{1}{4}\sum_{k=-1}^{2}x[1-k]=\frac{1}{4}\left(x[2]+x[1]+x[0]+x[-1]\right)=\frac{1}{4}\left(1+5+(-6)+0\right)=0,$$

$$y[2]=\frac{1}{4}\sum_{k=-1}^{2}x[2-k]=\frac{1}{4}\left(x[3]+x[2]+x[1]+x[0]\right)=\frac{1}{4}\left(0+1+5+(-6)\right)=0,$$

$$y[3]=\frac{1}{4}\left(x[4]+x[3]+x[2]+x[1]\right)=\frac{1}{4}\left(0+0+1+5\right)=\frac{3}{2},$$

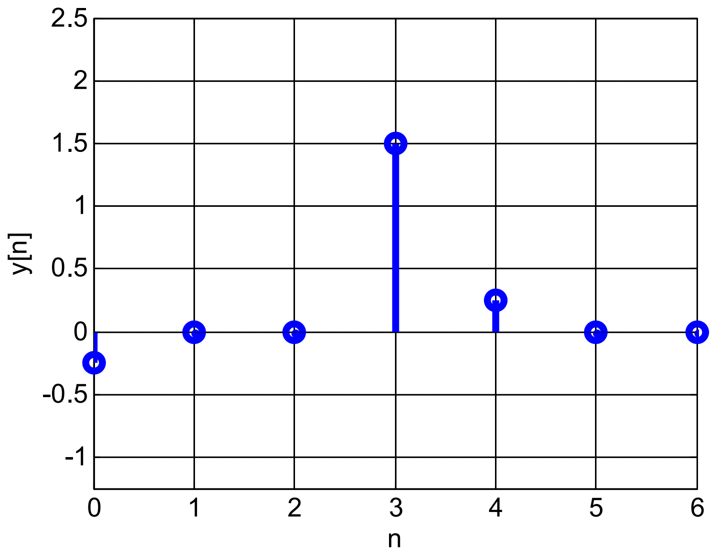
$$y[4]=\frac{1}{4}\left(x[5]+x[4]+x[3]+x[2]\right)=\frac{1}{4}\left(0+0+0+1\right)=\frac{1}{4},$$

$$y[5]=\frac{1}{4}\left(x[6]+x[5]+x[4]+x[3]\right)=\frac{1}{4}\left(0+0+0+0\right)=0,$$

…

Зважаючи на те, що вхідний сигнал скінченний, то всі подальші відліки вихідного сигналу будуть рівні нулю.

Графік вихідного сигналу наведено на рисунку:



<u>Відповідь:</u> $y[n]=\left[-\frac{1}{4},0,0,\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right]$.

1.2.5. Розрахувати вихідний сигнал суматора при подачі на вхід сигналу $x[n]=[6,-5,1]$.

Робота суматора описується різницевим рівнянням $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$. Поточний відлік вихідного сигналу суматора рівний сумі всіх попередніх відліків вхідного сигналу. Розрахуємо за цим виразом вихідний сигнал, починаючи з відліку $n=0$. Запишемо загальний вираз для $y[0]$:

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{0}x[k].$$

Будемо вважати, що вхідний сигнал $x[n]$ починається з моменту часу початку сигналу $t=0$, якому буде відповідати відлік $x[0]$. Всі відліки $x[n]$ з від'ємними номерами будемо вважати нульовими, отже

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{0}x[k]=\sum_{k=0}^{0}x[k]=x[0]=6.$$

Аналогічно, продовжимо для наступних відліків $y[1]$, $y[2]$,…:

$$y[1]=\sum_{k=0}^{1}x[k]=x[0]+x[1]=6-5=1,$$

$$y[2]=\sum_{k=0}^{2}x[k]=x[0]+x[1]+x[2]=6-5+1=2,$$

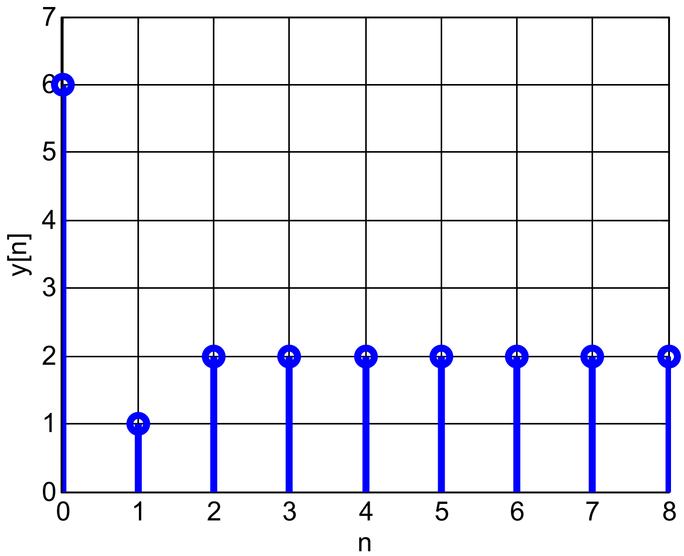
$$y[3]=\sum_{k=0}^{3}x[k]=x[0]+x[1]+x[2]+x[3]=6-5+1+0=2.$$

Тут треба відмітити, що вхідний сигнал скінченний, отже всі його наступні відліки після $x[2]$ будуть рівними нулю

$$y[4]=\sum_{k=0}^{4}x[k]=x[0]+x[1]+x[2]+x[3]+x[4]=6-5+1+0+0=2,$$

...

Видно, що оскільки вхідний сигнал скінченний, то всі наступні відліки вихідного сигналу суматора $y[n]$ будуть рівними 2; вихідний сигнал буде нескінченним. Графік перших п'яти відліків вихідного сигналу наведено на рисунку:



<u>Відповідь:</u> $y[n]=[6,1,2,2,2,\ldots]$.

1.2.6. Розрахувати вихідний сигнал квадратора при подачі на вхід сигналу $x[n]=[6,-5,1]$.

Робота квадратора описується рівнянням $y[n]=x[n]^2$. Будемо розраховувати відліки сигналу по черзі:

$y[0]=x[0]^2=6^2=36;$

$y[1]=x[1]^2=(-5)^2=25;$

$y[2]=x[2]^2=1^2=1.$

Зауважимо, що квадратор є нелінійною системою, оскільки для неї не виконується принцип суперпозиції.

<u>Відповідь:</u> $y[n]=[36,25,1]$.

1.3. Задачі для самостійного опрацювання

1.3.1. Розрахувати вихідний сигнал дискретної системи, заданої різницевим рівнянням $y[n]=2x[n]-4x[n-1]+5x[n-4]$ *при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[8,-3,2]$. *Побудувати графіки вхідного та вихідного сигналів.*

1.3.2. Розрахувати вихідний сигнал дискретної системи, заданої різницевим рівнянням $y[n]=-3x[n-3]+5x[n-5]$ *при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[1,-1,5]$. *Побудувати графіки вхідного та вихідного сигналів.*

1.3.3. Розрахувати вихідний сигнал суматора при подачі на вхід сигналу $x[n]=[-1,4,-3]$.

1.3.4. Розрахувати вихідний сигнал суматора при подачі на вхід сигналу $x[n]=[2,4,6,8]$.

1.3.5. Розрахувати вихідний сигнал суматора при подачі на вхід одиничного імпульсу $u[n]=\begin{cases}1, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$.

1.3.6. Розрахувати вихідний сигнал системи осереднення зі зсувом, заданої різницевим рівнянням $y[n]=\frac{1}{2}\sum_{k=-1}^{4}x[n-k]$ *при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[-1,4,5,1,9,3]$.

1.3.7. Розрахувати вихідний сигнал системи осереднення зі зсувом, заданої різницевим рівнянням $y[n]=\frac{1}{8}\sum_{k=-2}^{2}x[n-k]$ *при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[1,6,8,9,0,-6]$.

1.3.8. Розрахувати перші п'ять відліків вихідного сигналу дискретної системи, заданої різницевим рівнянням $y[n]-y[n-1]=x[n]-x[n-1]$ *при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[-6,5,1]$. *Вважати, що система знаходиться в стані спокою. Побудувати графік.*

1.3.9. Розрахувати перші п'ять відліків вихідного сигналу дискретної системи, заданої різницевим рівнянням $y[n]+3y[n-1]=-x[n]+5x[n-2]-3x[n-4]$ *при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[1,2,3]$. *Вважати, що система знаходиться в стані спокою. Побудувати графік.*

1.3.10. Розрахувати вихідний сигнал системи, яка підносить кожний відлік вхідного сигналу до кубу, при подачі на вхід сигналу $x[n]=[1,2,3]$.

2. Розрахунок вихідних сигналів дискретних систем на основі імпульсної характеристики

2.1. Основні теоретичні відомості

Послідовність $h[n]$ називається імпульсною характеристикою дискретної лінійної стаціонарної системи, якщо вона є реакцією системи на одиничний імпульс при нульових початкових умовах. Вихідний сигнал системи, яка описується імпульсною характеристикою, визначається за рівнянням згортки:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_1+N_2-1} x[k]h[n-k],$$

де $x[n]$ – вхідний сигнал довжиною N_1 відліків;

$h[n]$ – імпульсна характеристика довжиною N_2 відліків.

При каскадному (послідовному) з'єднанні дві лінійні стаціонарні дискретні системи з імпульсними характеристиками $h_1[n]$ та $h_2[n]$ можна замінити еквівалентною лінійною стаціонарною дискретною системою, імпульсна характеристика якої буде визначатися як згортка імпульсних характеристик двох систем:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n].$$

При паралельному з'єднанні дві лінійні стаціонарні дискретні системи з імпульсними характеристиками $h_1[n]$ та $h_2[n]$ мають спільний вхід, а їх вихідні послідовності додаються. Їх можна замінити еквівалентною лінійною стаціонарною дискретною системою, імпульсна характеристика якої дорівнює сумі імпульсних характеристик:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n].$$

2.2. Приклади розв'язання типових задач

2.2.1. Розрахувати імпульсну характеристику системи, заданої різницевим рівнянням $y[n] = 2x[n] - 3x[n-1] + 4x[n-3]$. *Побудувати графік.*

За визначенням, імпульсна характеристика – це реакція системи на одиничний імпульс при нульових початкових умовах. Запишемо різницеве рівняння системи з позначеннями, які зазвичай використовуються:

$$h[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + 4\delta[n-3],$$

де $\delta[n]$ – одиничний імпульс:

$$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

Проведемо розрахунки кожного відліку реакції системи по черзі:

$n=0$: $h[0]=2\delta[0]-3\delta[-1]+4\delta[-3]=2\cdot 1-3\cdot 0+4\cdot 0=2;$

$n=1$: $h[1]=2\delta[1]-3\delta[0]+4\delta[-2]=2\cdot 0-3\cdot 1+4\cdot 0=-3;$

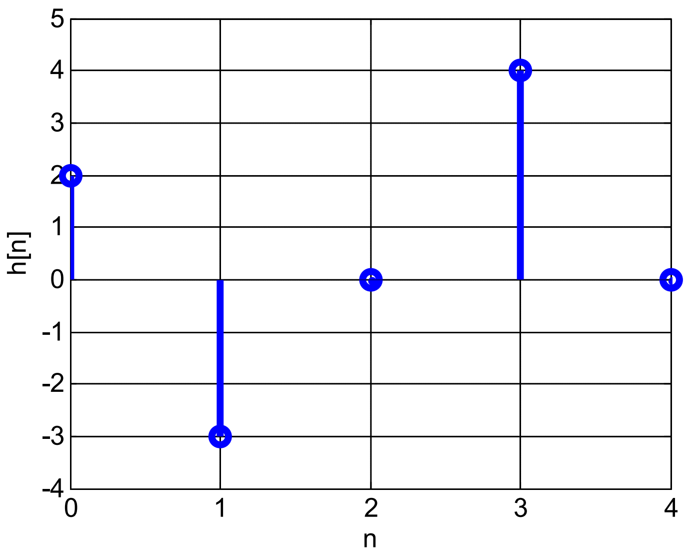
$n=2$: $h[2]=2\delta[2]-3\delta[1]+4\delta[-1]=2\cdot 0-3\cdot 0+4\cdot 0=0;$

$n=3$: $h[3]=2\delta[3]-3\delta[2]+4\delta[0]=2\cdot 0-3\cdot 0+4\cdot 1=4;$

$n=4$: $h[4]=2\delta[4]-3\delta[3]+4\delta[1]=2\cdot 0-3\cdot 0+4\cdot 0=0.$

Всі наступні відліки імпульсної характеристики також дорівнюють нулю.

Видно, що імпульсна характеристика такої нерекурсивної системи є скінченною. Графік імпульсної характеристики наведено на рисунку:



<u>Відповідь:</u> імпульсна характеристика $h[n]=[2,-3,0,4]$.

2.2.2. Розрахувати перші п'ять відліків імпульсної характеристики системи, заданої різницевим рівнянням $y[n]-2y[n-1]=x[n]-4x[n-1]+5x[n-3]$. *Побудувати графік.*

Імпульсна характеристика – реакція системи на одиничний імпульс при нульових початкових умовах. Перепишемо різницеве рівняння у зручному для розрахунків вигляді

$$y[n]=x[n]-4x[n-1]+5x[n-3]+2y[n-1]$$

та з використанням зі звичайними позначеннями $h[n]$ та $\delta[n]$:

$$h[n]=\delta[n]-4\delta[n-1]+5\delta[n-3]+2h[n-1].$$

Будемо розраховувати значення імпульсної характеристики рекурсивно, враховуючи те, що система є рекурсивною:

$n=0$: $h[0]=\delta[0]-4\delta[-1]+5\delta[-3]+2h[-1]=1-0+0+0=1.$

Тут використано те, що для того, щоб реакція системи була саме імпульсною характеристикою, необхідно, щоб система знаходилася в стані спокою, отже $h[-1]=0$. Виконаємо подальші розрахунки:

$$n=1:\quad h[1]=\delta[1]-4\delta[0]+5\delta[-2]+2h[0]=0-4\cdot1+5\cdot0+2\cdot1=-2.$$

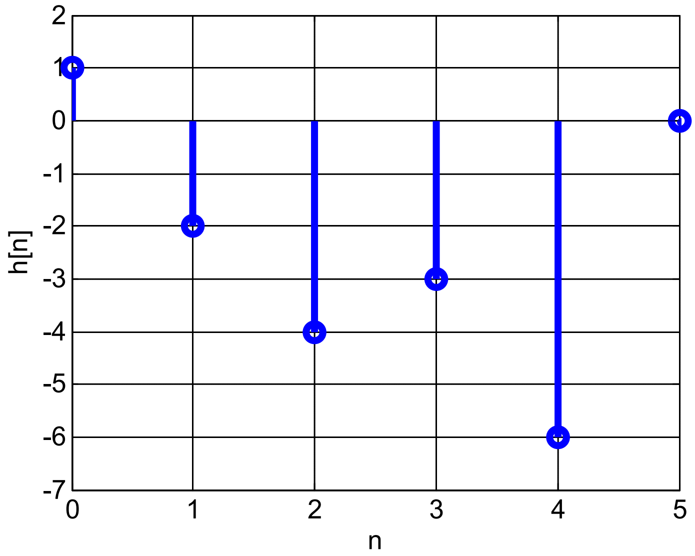
Тут використано те, що значення $h[0]=-2$ було отримано на попередньому кроці розрахунків.

$$n=2:\quad h[2]=\delta[2]-4\delta[1]+5\delta[-1]+2h[1]=0-4\cdot0+5\cdot0+2\cdot(-2)=-4;$$

$$n=3:\quad h[3]=\delta[3]-4\delta[2]+5\delta[0]+2h[2]=0-4\cdot0+5\cdot1+2\cdot(-4)=-3;$$

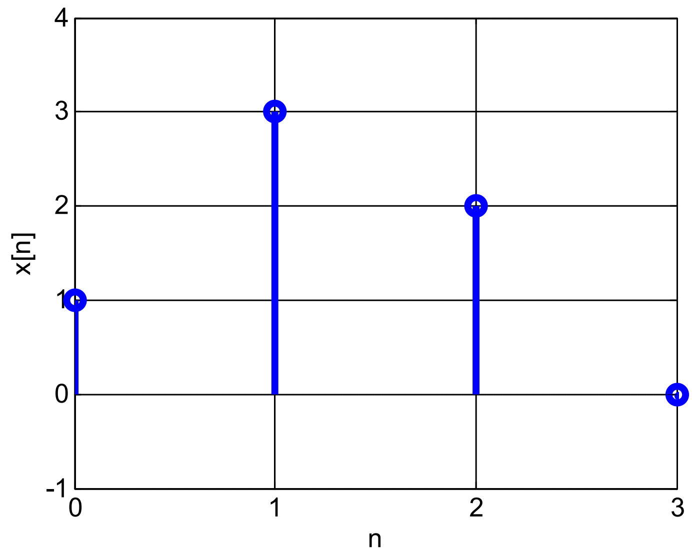
$$n=4:\quad h[4]=\delta[4]-4\delta[3]+5\delta[1]+2h[3]=0-4\cdot0+5\cdot0+2\cdot(-3)=-6.$$

Видно, що імпульсна характеристика такої системи буде нескінченною, але за умовою потрібно було розрахувати лише п’ять перших відліків: $h[n]=[1,-2,-4,-3,-6]$, графік наведено на рисунку:



2.2.3. Розрахувати вихідний сигнал системи, заданої імпульсною характеристикою $h[n]=[1,3,2]$ при подачі на вхід сигналу $x[n]=[-4,5,-6,7]$. Побудувати графіки вхідного та вихідного сигналів.

Побудуємо графік вхідного сигналу $x[n]$:



Для розрахунку вихідного сигналу системи, яка задана своєю імпульсною характеристикою, скористаємося рівнянням згортки:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_1+N_2-1} x[k]h[n-k].$$

Довжина вихідного сигналу $y[n]$ буде дорівнювати $N_1 + N_2 - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$ відліків. Розрахуємо значення вихідного сигналу, починаючи з першого:

$$n = 0:\ y[0] = \sum_{k=0}^{6} x[k]h[-k] = x[0]h[0] + x[1]h[-1] + ... = x[0]h[0] = -4 \cdot 1 = -4.$$

Тут варто відмітити, що значення відліків сигналу та відліків імпульсної характеристики з від'ємними номерами вважаються рівними нулю.

$$n = 1:\ y[1] = \sum_{k=0}^{6} x[k]h[1-k] = x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[-1] + ...$$

$$= -4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 0 = -7;$$

$$n = 2:\ y[2] = \sum_{k=0}^{6} x[k]h[2-k] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] + x[3]h[-1] + ... =$$

$$= -4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + (-6) \cdot 1 + 0 = 1;$$

$$n = 3:\ y[3] = \sum_{k=0}^{6} x[k]h[3-k] = x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0] +$$

$$+ x[4]h[-1] + ... = 0 + 5 \cdot 2 + (-6) \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 0 = -1;$$

$$n = 4:\ y[4] = \sum_{k=0}^{6} x[k]h[4-k] = x[0]h[4] + x[1]h[3] + x[2]h[2] + x[3]h[1] +$$

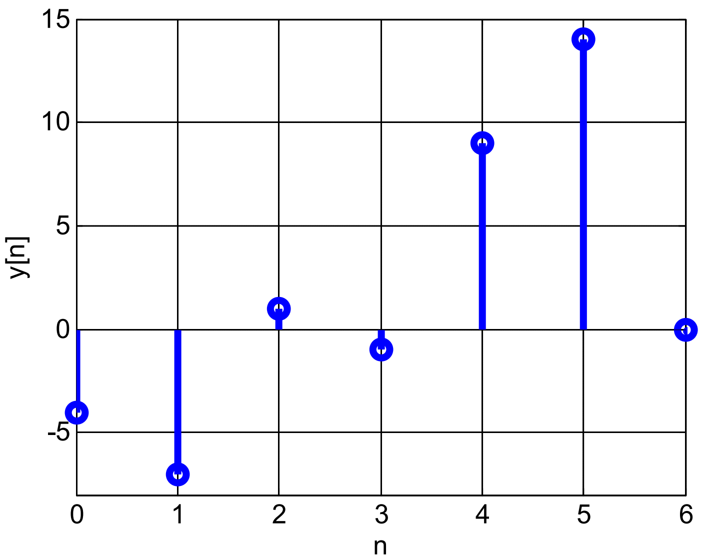
$$+ x[4]h[0] + ... = 0 + 0 + (-6) \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 0 = 9.$$

В цьому виразі значення $x[4]$ вважається рівним нулю, оскільки вхідний сигнал $x[n]$ є скінченним і має всього чотири відліки з номерами від 0 до 3.

$$n=5:\; y[5]=\sum_{k=0}^{6} x[k]h[5-k]=x[0]h[5]+x[1]h[4]+x[2]h[3]+x[3]h[2]+$$

$$+x[4]h[1]+...=0+0+0+7\cdot 2+0=14;$$

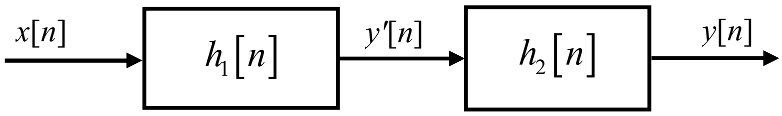
Усі інші відліки вихідного сигналу будуть дорівнювати нулю; видно, що реакція системи на такий вхідний сигнал буде скінченною і рівною $y[n]=[-4,-7,1,-1,9,14]$. Побудуємо графік вихідного сигналу $y[n]$:



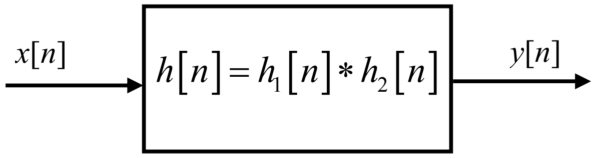
<u>Відповідь:</u> вихідний сигнал системи $y[n]=[-4,-7,1,-1,9,14]$.

2.2.4. Задані дві системи з імпульсними характеристиками $h_1[n]=[1,2,3]$ *та* $h_2[n]=[-4,5,-6]$. *Розрахувати вихідний сигнал при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[1,-3,0,2]$ *при послідовному з'єднанні цих систем.*

Відомо, що дві системи, які з'єднані послідовно, можна замінити одною системою, яка буде перетворювати сигнал так само. Імпульсна характеристика еквівалентної системи, що складається з двох послідовно з'єднаних систем, розраховується як згортка імпульсних характеристик цих систем: $h_{екв}[n]=h_1[n]*h_2[n]$.



а)



б)

Послідовне з'єднання систем

Розрахуємо спочатку імпульсну характеристику еквівалентної системи за виразом

$$h_{екв}\left[n\right]=\sum_{k=0}^{5}h_1\left[k\right]h_2\left[n-k\right].$$

$$h_{екв}\left[0\right]=\sum_{k=0}^{5}h_1\left[k\right]h_2\left[0-k\right]=\left(h_1\left[0\right]h_2\left[0\right]+h_1\left[1\right]h_2\left[-1\right]+\ldots+h_1\left[5\right]h_2\left[-5\right]\right)=$$

$$=1\cdot\left(-4\right)+2\cdot 0+3\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0=-4,$$

$$h_{екв}\left[1\right]=\sum_{k=0}^{5}h_1\left[k\right]h_2\left[1-k\right]=\left(h_1\left[0\right]h_2\left[1\right]+h_1\left[1\right]h_2\left[0\right]+\ldots+h_1\left[5\right]h_2\left[-4\right]\right)=$$

$$=1\cdot 5+2\cdot\left(-4\right)+3\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0=-3,$$

$$h_{екв}\left[2\right]=\sum_{k=0}^{5}h_1\left[k\right]h_2\left[2-k\right]=\left(h_1\left[0\right]h_2\left[2\right]+h_1\left[1\right]h_2\left[1\right]+\ldots+h_1\left[5\right]h_2\left[-3\right]\right)=$$

$$=1\cdot\left(-6\right)+2\cdot 5+3\cdot\left(-4\right)+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0=-8,$$

$$h_{екв}\left[3\right]=\sum_{k=0}^{5}h_1\left[k\right]h_2\left[3-k\right]=\left(h_1\left[0\right]h_2\left[3\right]+h_1\left[1\right]h_2\left[2\right]+\ldots+h_1\left[5\right]h_2\left[-2\right]\right)=$$

$$=1\cdot 0+2\cdot\left(-6\right)+3\cdot 5+0\cdot\left(-4\right)+0\cdot 0+0\cdot 0=3,$$

$$h_{екв}\left[4\right]=\sum_{k=0}^{5}h_1\left[k\right]h_2\left[4-k\right]=\left(h_1\left[0\right]h_2\left[4\right]+h_1\left[1\right]h_2\left[3\right]+\ldots+h_1\left[5\right]h_2\left[-1\right]\right)=$$

$$=1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot\left(-6\right)+0\cdot 5+0\cdot\left(-4\right)+0\cdot 0=-18,$$

$$h_{екв}\left[5\right]=\sum_{k=0}^{5}h_1\left[k\right]h_2\left[5-k\right]=\left(h_1\left[0\right]h_2\left[5\right]+h_1\left[1\right]h_2\left[4\right]+\ldots+h_1\left[5\right]h_2\left[0\right]\right)=$$

$$=1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 0+\left(-6\right)\cdot 0+0\cdot 5+0\cdot\left(-4\right)+0\cdot 0=0,$$

$\ldots$

Очевидно, що всі подальші відліки характеристики будуть рівні 0. Тобто імпульсною характеристикою еквівалентної системи є $h_{екв} = [-4, -3, -8, 3, 18]$.

Маючи значення вхідного сигналу та імпульсної характеристики, виконаємо розрахунок вихідного сигналу на основі рівняння згортки:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{8} h_{екв}[k]x[n-k]:$$

$$y[0] = \sum_{k=0}^{8} h_{екв}[k]x[0-k] = h_{екв}[0]x[0] + h_{екв}[1]x[-1] + \ldots + h_{екв}[8]x[-8] =$$

$$= (-4)\cdot 1 + (-3)\cdot 0 + (-8)\cdot 0 + 3\cdot 0 + (-18)\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = -4,$$

$$y[1] = \sum_{k=0}^{8} h_{екв}[k]x[1-k] = h_{екв}[0]x[1] + h_{екв}[1]x[0] + \ldots + h_{екв}[8]x[-7] =$$

$$= (-4)\cdot(-3) + (-3)\cdot 1 + (-8)\cdot 0 + 3\cdot 0 + (-18)\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 9,$$

$$y[2] = \sum_{k=0}^{8} h_{екв}[k]x[2-k] = h_{екв}[0]x[2] + h_{екв}[1]x[1] + \ldots + h_{екв}[8]x[-6] =$$

$$= (-4)\cdot 0 + (-3)\cdot(-3) + (-8)\cdot 1 + 3\cdot 0 + (-18)\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 1,$$

$$y[3] = \sum_{k=0}^{8} h_{екв}[k]x[3-k] = h_{екв}[0]x[3] + h_{екв}[1]x[2] + \ldots + h_{екв}[8]x[-5] =$$

$$= (-4)\cdot 2 + (-3)\cdot 0 + (-8)\cdot(-3) + 3\cdot 1 + (-18)\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 19,$$

$$y[4] = \sum_{k=0}^{8} h_{екв}[k]x[4-k] = h_{екв}[0]x[4] + h_{екв}[1]x[3] + \ldots + h_{екв}[8]x[-4] =$$

$$= (-4)\cdot 0 + (-3)\cdot 2 + (-8)\cdot 0 + 3\cdot(-3) + (-18)\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = -33,$$

$$y[5] = \sum_{k=0}^{8} h_{екв}[k]x[5-k] = h_{екв}[0]x[5] + h_{екв}[1]x[4] + \ldots + h_{екв}[8]x[-3] =$$

$$= (-4)\cdot 0 + (-3)\cdot 0 + (-8)\cdot 2 + 3\cdot 0 + (-18)\cdot(-3) + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 38,$$

$$y[6] = \sum_{k=0}^{8} h_{екв}[k]x[6-k] = h_{екв}[0]x[6] + h_{екв}[1]x[5] + \ldots + h_{екв}[8]x[-2] =$$

$$= (-4)\cdot 0 + (-3)\cdot 0 + (-8)\cdot 0 + 3\cdot 2 + (-18)\cdot 0 + 0\cdot(-3) + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 6,$$

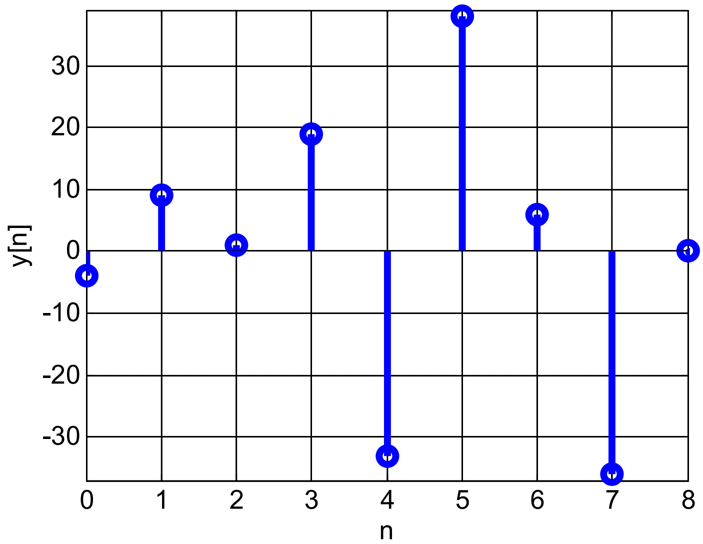
$$y[7] = \sum_{k=0}^{8} h_{екв}[k]x[7-k] = h_{екв}[0]x[7] + h_{екв}[1]x[6] + \ldots + h_{екв}[8]x[-1] =$$

$$= (-4)\cdot 0 + (-3)\cdot 0 + (-8)\cdot 0 + 3\cdot 0 + (-18)\cdot 2 + 0\cdot 0 + 0\cdot(-3) + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = -36,$$

$\ldots$

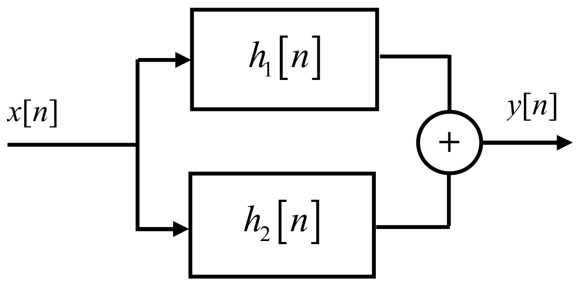
Очевидно, що всі подальші відліки будуть рівні 0.

Графік вихідного сигналу наведено на рисунку:

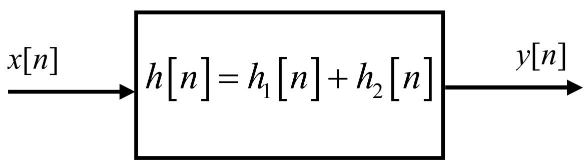


Відповідь: сигнал на виході двох систем, які з'єднані послідовно, буде рівним $y[n] = [-4, 9, 1, 19, -33, 38, 6, -36]$.

2.2.5. Задані дві системи з імпульсними характеристиками $h_1[n] = [1, 2, 3]$ *та* $h_2[n] = [-4, 5, -6]$. *Розрахувати вихідний сигнал при подачі на вхід сигналу* $x[n] = [1, -3, 0, 2]$ *при паралельному з'єднанні цих систем.*



а)



б)

Паралельне з'єднання систем

При паралельному з'єднанні на вхід двох систем подається один і той самий сигнал $x[n]$, а вихідні сигнали систем додаються:

$$y[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = x[n] * \left(h_1[n] + h_2[n]\right).$$

Через те, що задані системи з імпульсними характеристиками $h_1\left[n\right]$ та $h_2\left[n\right]$ паралельно з'єднані, їх можна замінити еквівалентною системою, імпульсна характеристика якої є сумою імпульсних характеристик двох систем:

$h\left[n\right] = h_1\left[n\right] + h_2\left[n\right].$

Розрахуємо $h[n]$:

$h[0] = h_1[0] + h_2[0] = 1 + (-4) = -3,$

$h[1] = h_1[1] + h_2[1] = 2 + 5 = 7,$

$h[2] = h_1[2] + h_2[2] = 3 + (-6) = -3.$

В результаті імпульсна характеристика еквівалентної системи матиме вигляд $h[n] = [-3, 7, -3]$.

Враховуючи, що $N_1 = 4$ тому що послідовність $x[n]$ має 4 відліки та $N_2 = 3$ тому що послідовність $h[n]$ має 3 відліки, формула згортки для розрахунку вихідного сигналу матиме вигляд:

$$y\left[n\right] = \sum_{k=0}^{6} x\left[k\right] h\left[n-k\right].$$

Розрахуємо відліки вихідного сигналу $y[n]$:

$$y[0] = \sum_{k=0}^{6} x\left[k\right] h\left[0-k\right] = x[0]h[0] + x[1]h[-1] + \ldots = 1\cdot(-3) + (-3)\cdot 0 + \ldots = -3,$$

$$y[1] = \sum_{k=0}^{6} x\left[k\right] h\left[1-k\right] = x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[-1] + \ldots =$$

$$= 1\cdot 7 + (-3)\cdot(-3) + 0\cdot 0 + \ldots = 16,$$

$$y[2] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] + x[3]h[-1] + \ldots =$$

$$= 1\cdot(-3) + (-3)\cdot 7 + 0\cdot(-3) + 2\cdot 0 + \ldots = -24,$$

$$y[3] = x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0] + x[4]h[-1] + \ldots =$$

$$= 1\cdot 0 + (-3)\cdot(-3) + 0\cdot 7 + 2\cdot(-3) + \ldots = 3,$$

$$y[4] = x[0]h[4] + x[1]h[3] + x[2]h[2] + x[3]h[1] + x[4]h[0] + x[5]h[-1] + \ldots =$$

$$= 1\cdot 0 + (-3)\cdot 0 + 0\cdot(-3) + 2\cdot 7 + 0\cdot(-3) + 0\cdot 0 + \ldots = 14,$$

$$y[5] = x[0]h[5] + x[1]h[4] + x[2]h[3] + x[3]h[2] + x[4]h[1] + \ldots =$$

$$= 1\cdot 0 + (-3)\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot(-3) + 0\cdot 7 + \ldots = -6,$$

$$y[6] = x[0]h[6] + x[1]h[5] + x[2]h[4] + x[3]h[3] + x[4]h[2] + \ldots =$$

$$= 1\cdot 0 + (-3)\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0\cdot(-3) + \ldots = 0.$$

<u>Відповідь:</u> $y[n] = [-3, 16, -24, 3, 14, -6].$

2.3. Задачі для самостійного опрацювання

2.3.1. Розрахувати імпульсну характеристику системи, заданої різницевим рівнянням $y[n]=x[n]+x[n-1]-x[n-2]+3x[n-3]-8x[n-4]+2x[n-5]-x[n-6]$. *Побудувати графік.*

2.3.2. Розрахувати імпульсну характеристику системи, заданої різницевим рівнянням $y[n]+y[n-1]=x[n]+x[n-1]$. *Побудувати графік.*

2.3.3. Розрахувати імпульсну характеристику системи, заданої різницевим рівнянням $y[n]-y[n-1]=x[n]+x[n-1]$. *Побудувати графік.*

2.3.4. Розрахувати імпульсну характеристику системи, заданої різницевим рівнянням $y[n]+y[n-1]=x[n]-x[n-1]$. *Побудувати графік.*

2.3.5. Розрахувати імпульсну характеристику системи, заданої різницевим рівнянням $y[n]-y[n-1]=x[n]-x[n-1]$. *Побудувати графік.*

2.3.6. Розрахувати вихідний сигнал системи, заданої імпульсною характеристикою $h[n]=[5,4,3]$ *при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[-1,6,-2]$. *Побудувати графіки вхідного та вихідного сигналів.*

2.3.7. Розрахувати вихідний сигнал системи, заданої імпульсною характеристикою $h[n]=[5,4,3]$ *при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[1,1,1]$. *Побудувати графіки вхідного та вихідного сигналів.*

2.3.8. Задані дві системи з імпульсними характеристиками $h_1[n]=[3,2,1]$ *та* $h_2[n]=[6,-4,5]$. *Розрахувати вихідний сигнал при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[-1,9,-9,1]$ *при послідовному з'єднанні цих систем.*

2.3.9. Задані дві системи з імпульсними характеристиками $h_1[n]=[7,0,-1]$ *та* $h_2[n]=[9,-2,8]$. *Розрахувати вихідний сигнал при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[9,-2,-9,2]$ *при послідовному з'єднанні цих систем.*

2.3.10. Задані дві системи з імпульсними характеристиками $h_1[n]=[-2,2,1]$ *та* $h_2[n]=[-1,-2,3]$. *Розрахувати вихідний сигнал при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[1,3,-1,2]$ *при паралельному з'єднанні цих систем.*

2.3.11. Задані дві системи з імпульсними характеристиками $h_1[n]=[1,3,5]$ *та* $h_2[n]=[-3,4,1]$. *Розрахувати вихідний сигнал при подачі на вхід сигналу* $x[n]=[3,1,-2,-1,2]$ *при паралельному з'єднанні цих систем.*

3. Отримання базисів розкладу дискретних сигналів

3.1. Основні теоретичні відомості

Нехай маємо дискретний сигнал з N відліків $x[n]$. Математичною моделлю таких сигналів будуть вектори в просторі C^N, тобто послідовності N впорядкованих комплексних (в загальному випадку) чисел. Будемо нумерувати ці N чисел індексами $n = \{0,1,2,\dots N-1\}$.

Норма (евклідова) сигналу розраховується як квадратний корінь із скалярного добутку сигналу самого на себе. Для дискретного скінченного сигналу $x[n]$ вираз для норми буде мати вигляд:

$$\|x[n]\| = \sqrt{\langle x[n], x[n]\rangle} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x^*[n]}.$$

Енергія може бути розрахована як квадрат норми.

Базисом Фурьє в просторі C^N будуть функції

$$F_m[n] = e^{2\pi j \frac{m}{N} n},$$

де $n = 0,1,2,\dots N-1$ – номер відліку функції;

$m = 0,1,2,\dots,N-1$ – порядковий номер функції.

Базис Уолша в просторі C^N може бути заданий як рядки матриці Адамара.

Матрицею Адамара H_N називається ортогональна квадратна матриця порядку N ($N = 2^l$, $l = 0,1,2,3...$), елементами якої є дійсні числа ± 1. Найпростішою матрицею Адамара є матриця другого порядку:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Для побудови матриць Адамара вищих порядків використовується така теорема:

Якщо H_N – матриця Адамара порядку N, то матриця:

$$H_{2N} = \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

є матрицею Адамара порядку $2N$.

Рядки матриці Адамара

$$had(k,n), \quad k = 0...N-1$$

можна розглядати як *функції дискретної змінної* n, визначені в цілочислених точках $0,1,2,...N-1$ інтервалу від 0 до $N-1$. Ці функції називаються *функціями Уолша*. Змінна k визначає номер функції (номер рядка в матриці Адамара), змінна n – дискретний час або номер відліку. Ці функції належать до N-вимірного простору сигналів.

Вектори називаються ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

3.2. Приклади розв'язання типових задач

3.2.1. Розрахувати норму та енергію сигналу $x[n]=[-1,2,4+2j,3,-6j]$.

Розрахуємо енергію та норму сигналу відповідно з формулами

$$\|x[n]\|=\sqrt{\langle x[n],x[n]\rangle}=\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1}x[n]x^*[n]},$$

$$E=\|x[n]\|^2.$$

Запишемо спочатку значення комплексно-спряженого сигналу до $x[n]$:

$$x^*[n]=[-1,2,4-2j,3,6j].$$

$$\|x[n]\|=\sqrt{x[0]\cdot x^*[0]+x[1]\cdot x^*[1]+x[2]\cdot x^*[2]+x[3]\cdot x^*[3]+x[4]\cdot x^*[4]}=$$

$$=\sqrt{(-1)\cdot(-1)+2\cdot 2+(4+2j)\cdot(4-2j)+3\cdot 3+6j\cdot(-6j)}=$$

$$=\sqrt{1+4+16+4+9+36}=\sqrt{70}\approx 8{,}366.$$

<u>Відповідь:</u> норма сигналу дорівнює $\sqrt{70}\approx 8{,}366$, енергія сигналу дорівнює $E=\|x[n]\|^2=70$.

3.2.2. Розрахувати скалярний добуток сигналів $x[n]=[-1,2,4+2j,3,-6j]$ *та* $y[n]=[2,1+j,5,-10,8]$.

Скалярний добуток комплексних сигналів розраховується за формулою $\langle x[n],y[n]\rangle=\sum\limits_{n=0}^{N-1}x[n]y^*[n]$, де $y^*[n]$ – сигнал комплексно-спряжений до сигналу $y[n]$. Запишемо комплексно-спряжений сигнал $y^*[n]=[2,1-j,5,-10,8]$ та розрахуємо скалярний добуток:

$$\langle x[n], y[n] \rangle = \sum_{n=0}^{4} x[n] y^*[n] =$$
$$= x[0]y^*[0] + x[1]y^*[1] + x[2]y^*[2] + x[3]y^*[3] + x[4]y^*[4] =$$
$$= (-1)\cdot 2 + 2\cdot(1+j) + (4+2j)\cdot 5 + 3\cdot(-10) + (-6j)\cdot 8 =$$
$$= -10 - 40j.$$

Відповідь: скалярний добуток рівний $-10-40j$.

3.2.3. Задати базис Декарта в дво-, три-, та чотиривимірних просторах.

В Декартовому базисі базисними векторами є координатні орти, тобто вектори, одна з координат яких дорівнює одиниці, а решта – нулю. Кількість координат і кількість векторів в базисі буде рівною розмірності простору.

Таким чином, для двовимірного простору такими ортами є: $e_1 = [0, 1]$ та $e_2 = [1, 0]$;

для тривимірного простору такими ортами є: $e_1 = [0, 0, 1]$, $e_2 = [0, 1, 0]$ та $e_3 = [1, 0, 0]$;

для чотиривимірного простору такими ортами є: $e_1 = [0, 0, 0, 1]$, $e_2 = [0, 0, 1, 0]$, $e_3 = [0, 1, 0, 0]$ та $e_4 = [1, 0, 0, 0]$.

3.2.4. Задати ортогональний базис Фурьє в двовимірному просторі дискретних сигналів.

Базисом Фур'є в просторі C^N будуть функції

$F_m[n] = e^{2\pi j \frac{m}{N} n}$,

де $n = 0,1,2,\ldots N-1$ – номер відліку функції;

$m = 0,1,2,\ldots,N-1$ – порядковий номер функції.

Для двовимірного (C^2) простору $N = 2$; номери відліків функції будуть набувати значення $n = 0,1$; порядкові номери функцій будуть набувати значення $m = 0,1$, тобто двовимірний базис буде представлений двома дискретними функціями ($F_0[n]$ та $F_1[n]$), кожна з яких буде мати два відлік ($n = 0,1$).

1. Вираз для отримання всіх відліків функції $F_0[n]$, відповідно до загальної формули: $F_0[n] = e^{2\pi j \frac{0}{2} n} = 1$:
   a. $n = 0$: $F_0[0] = 1$;
   b. $n = 1$: $F_0[1] = 1$;

2. $F_1[n] = e^{2\pi j \frac{1}{2} n}$:

   a. $n = 0$: $F_1[0] = e^{2\pi j \frac{1}{2} 0} = 1$

   b. $n = 1$: $F_1[1] = e^{2\pi j \frac{1}{2} 1} = e^{j\pi} = -1$

Тобто у двовимірному просторі C^2 базис Фурьє буде виглядати наступним чином: $F_0[n] = [1,\ 1]$, $F_1[n] = [1,\ -1]$.

3.2.5. Задати базис Фурьє в тривимірному просторі дискретних сигналів та перевірити його на ортогональність. Задати ортонормований базис Фурьє в тривимірному просторі.

Базисом Фур'є в просторі C^N будуть функції

$F_m[n] = e^{2\pi j \frac{m}{N} n}$,

де $n = 0,1,2,\ldots N-1$ – номер відліку функції;

$m = 0,1,2,\ldots,N-1$ – порядковий номер функції.

Для тривимірного (C^3) простору $N = 3$; номери відліків функції будуть набувати значення $n = 0, 1, 2$; порядкові номери функцій будуть набувати значення $m = 0, 1, 2$, тобто тривимірний базис буде представлений трьома дискретними функціями (F_0, F_1 та F_2), кожна з яких буде мати три відліки ($n = 0, 1, 2$).

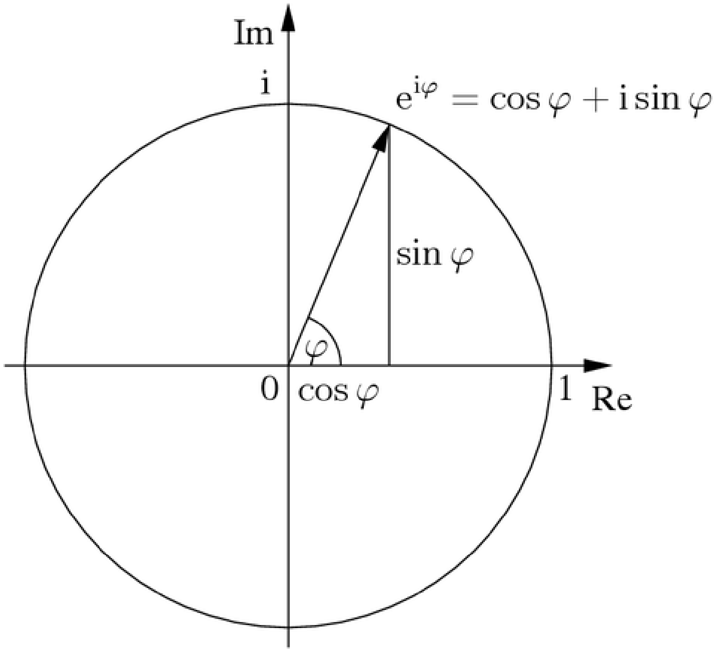
1. $F_0[n] = e^{2\pi j \frac{0}{3} n} = 1$:
   a. $n = 0$: $F_0[0] = 1$
   b. $n = 1$: $F_0[1] = 1$
   c. $n = 2$: $F_0[2] = 1$

2. $F_1[n] = e^{2\pi j \frac{1}{3} n}$:

   a. $n = 0$: $F_1[0] = e^{2\pi j \frac{1}{3} 0} = 1$

   b. $n = 1$: $F_1[1] = e^{2\pi j \frac{1}{3} 1}$

   Скористаємось формулою Ейлера та її геометричною інтерпретацією для зручності розрахунків: $e^{ix} = \cos x + j \sin x$



$$F_1[1] = e^{\frac{2}{3}\pi j} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + j\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c. $n = 2$: $F_1[2] = e^{2\pi j \frac{1}{3} 2} = e^{\frac{4}{3}\pi j} = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + j\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $F_2[n] = e^{2\pi j \frac{2}{3} n}$:

a. $n = 0$: $F_2[0] = e^{2\pi j \frac{2}{3} 0} = 1$

b. $n = 1$: $F_2[1] = e^{2\pi j \frac{2}{3} 1} = e^{\frac{4}{3}\pi j} = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + j\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. $n = 2$: $F_2[2] = e^{2\pi j \frac{2}{3} 2} = e^{\frac{8}{3}\pi j} = e^{\frac{2}{3}\pi j} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + j\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тобто у трьохвимірному просторі базис C^3 буде виглядати наступним чином:

$F_0[n] = [1, 1, 1]$,

$F_1[n] = \left[1, -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ та

$F_2[n] = \left[1, -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Перевіримо ортогональність отриманого базису.

Ортогональний базис – такий, для якого виконуються співвідношення:

$\left\langle \varphi_i, \varphi_j \right\rangle = \begin{cases} \|\varphi_i\|^2, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, де для нашого випадку $i = 0, 1, 2$; $j = 0, 1, 2$.

Перевіримо це співвідношення для отриманого базису; для цього розрахуємо попарні скалярні добутки для всіх функцій в базисі:

a. $i = 0$; $j = 0$:

$$\left\langle F_0, F_0 \right\rangle = \left\| F_0 \right\|^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

b. $i = 0$; $j = 1$:

$$\left\langle F_0, F_1 \right\rangle = \left[F_0, F_1 * \right] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

c. $i = 0$; $j = 2$:

$$\left\langle F_0, F_2 \right\rangle = \left[F_0, F_2 * \right] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

d. $i = 1$; $j = 0$:

$$\left\langle F_1, F_0 \right\rangle = 1 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 1 = 0$$

e. $i = 1$; $j = 1$:

$$\left\langle F_1, F_1 \right\rangle = \left\| F_1 \right\|^2 = 1 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3$$

f. $i = 1$; $j = 2$:

$$\left\langle F_1, F_2 \right\rangle = \left[F_1, F_2 * \right] = 1 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

g. $i = 2$; $j = 0$:

$$\left\langle F_2, F_0 \right\rangle = \left[F_2, F_0 * \right] = 1 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 1 = 0$$

h. $i = 2$; $j = 1$:

$$\left\langle F_2, F_1 \right\rangle = \left[F_2, F_1 * \right] = 1 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

i. $i = 2$; $j = 2$:

$$\left\langle F_2, F_2 \right\rangle = \left[F_2, F_2 * \right] = 1 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3$$

Видно, що всі скалярні добутки різних функцій в базисі є нульовими, тобто отриманий базис задовольняє означенню ортогонального базису.

Для того, щоб задати ортонормований базис (в якому норма базисної функції буде рівною одиниці), можна взяти ортогональний базис та поділити кожну функцію в ньому на норму.

Норма кожної функції в цьому базисі:

$$\left\| F_m[n] \right\| = \sqrt{\left\langle F_m[n], F_m[n] \right\rangle} = \sqrt{3}.$$

Ортонормований базис Фурьє в тривимірному просторі дискретних сигналів буде таким:

$$F_0[n] = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right],$$

$$F_1[n] = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} + j\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} - j\frac{1}{2} \right] \text{ та}$$

$$F_2[n] = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} - j\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} + j\frac{1}{2} \right].$$

3.2.6. Задати базис Уолша в чотиривимірному просторі та перевірити його на ортогональність.

Базис Уолша в просторі C^N може бути заданий як рядки матриці Адамара.

Згідно з теоремою $H_{2N} = \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$ та враховуючи що $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ отримаємо:

$$H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тобто базис Уолша в чотиривимірному просторі виглядає наступним чином:

$$had(0,n) = [1,1,1,1],$$

$$had(1,n) = [1,-1,1,-1],$$

$$had(2,n) = [1,1,-1,-1] \text{ та}$$

$$had(3,n) = [1,-1,-1,1].$$

Перевіримо ортогональність отриманого базису.

Ортогональний базис – такий, для якого виконуються співвідношення:

$$\left\langle \varphi_i, \varphi_j \right\rangle = \begin{cases} \left\| \varphi_i \right\|^2, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \text{ де } i = 0,1,2; \; j = 0,1,2.$$

Перевіримо це співвідношення для отриманого раніш базису:

a. $i=0$, $j=0$: $\left\langle had(0,n), had(0,n)\right\rangle = 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1=4$

b. $i=0$, $j=1$: $\left\langle had(0,n), had(1,n)\right\rangle = 1\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot(-1)=0$

c. $i=0$, $j=2$: $\left\langle had(0,n), had(2,n)\right\rangle = 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot(-1)=0$

d. $i=0$, $j=3$: $\left\langle had(0,n), had(3,n)\right\rangle = 1\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot(-1)+1\cdot1=0$

e. $i=1$, $j=0$: $\left\langle had(1,n), had(0,n)\right\rangle = 1\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1=0$

f. $i=1$, $j=1$: $\left\langle had(1,n), had(1,n)\right\rangle = 1\cdot1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot1+(-1)\cdot(-1)=4$

g. $i=1$, $j=2$: $\left\langle had(1,n), had(2,n)\right\rangle = 1\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)=0$

h. $i=1$, $j=3$: $\left\langle had(1,n), had(3,n)\right\rangle = 1\cdot1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot(-1)+(-1)\cdot1=0$

i. $i=2$, $j=0$: $\left\langle had(2,n), had(0,n)\right\rangle = 1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1+(-1)\cdot1=0$

j. $i=2$, $j=1$: $\left\langle had(2,n), had(1,n)\right\rangle = 1\cdot1+1\cdot(-1)+(-1)\cdot1+(-1)\cdot(-1)=0$

k. $i=2$, $j=2$: $\left\langle had(2,n), had(2,n)\right\rangle = 1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)=4$

l. $i=2$, $j=3$: $\left\langle had(2,n), had(3,n)\right\rangle = 1\cdot1+1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot1=0$

m. $i=3$, $j=0$: $\left\langle had(3,n), had(0,n)\right\rangle = 1\cdot1+(-1)\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot1=0$

n. $i=3$, $j=1$: $\left\langle had(3,n), had(1,n)\right\rangle = 1\cdot1+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot1+1\cdot(-1)=0$

o. $i=3$, $j=2$: $\left\langle had(3,n), had(2,n)\right\rangle = 1\cdot1+(-1)\cdot1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot(-1)=0$

p. $i=3$, $j=3$: $\left\langle had(3,n), had(3,n)\right\rangle = 1\cdot1+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)+1\cdot1=4$

Отже, отриманий базис задовольняє означенню ортогонального базису. Видно, що норма базисного вектора дорівнює $\left\| had(k,n) \right\| = \sqrt{4} = 2$.

3.3. Задачі для самостійного опрацювання

3.3.1. Розрахувати норму та енергію сигналу $x[n]=[2-j,1-j,5-5j,10j,8]$.

3.3.2. Розрахувати норму та енергію сигналу $x[n]=[9,-3j,-4j,10j,2]$.

3.3.3. Розрахувати скалярний добуток сигналів $x[n]=[-6j,-1,2+5j,4+2j,3]$ *та* $y[n]=[1-2j,8+3j,2,1+j,5-5j]$.

3.3.4. Розрахувати скалярний добуток сигналів $x[n]=[3,5,8+2j,0,j]$ *та* $y[n]=[1+10j,5,5,-1,2+4j]$.

3.3.5. Задати ортонормований базис Уолша в чотиривимірному просторі.

3.3.6. Задати ортонормований базис Уолша в п'ятивимірному просторі.

4. Перетворення дискретних сигналів

4.1. Основні теоретичні відомості

Для скінченного дискретного сигналу з N відліків $x[n]$ пряме та обернене перетворення Фурьє задаються виразами:

$$c[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{m}{N} n},$$

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} c[m] e^{j2\pi \frac{m}{N} n}.$$

Пряме перетворення Уолша дискретних сигналів:

$$W[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] had(k,n).$$

Обернене перетворення Уолша:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} W[k] had(k,n).$$

де $had(k,n), \quad k = 0...N-1$ – рядки матриці Адамара (функції Уолша).

z-перетворення сигналу $x[n]$ – це правило, яке ставить у відповідність сигналу $x[n]$ деяку функцію $X(z)$ від неперервної комплексної змінної *z*. Для дискретного скінченного сигналу перетворення розраховується за виразом:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z^{-n}.$$

4.2. Приклади розв'язання типових задач

4.2.1. Розрахувати спектр за Фурьє дискретного сигналу $x[n] = [1,-2,3,-4,5]$. *Побудувати графіки амплітудного та фазового спектру сигналу.*

В даному випадку кількість відліків N послідовності $x[n]$ дорівнює 5, тому загальний вираз для отримання комплексного спектру сигналу буде мати вигляд:

$$c[m] = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x[n] e^{-j2\pi \frac{m}{5} n}.$$

Розрахуємо за цією формулою коефіцієнти спектру $c[m]$:

$$c[0]=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x\left[n\right]e^{-j2\pi\frac{0}{5}n}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x\left[n\right]=\frac{1}{5}\left(1+(-2)+3+(-4)+5\right)=0.6,$$

$$c[1]=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x\left[n\right]e^{-j2\pi\frac{1}{5}n}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x\left[n\right]\left(\cos\left(-2\pi\frac{1}{5}n\right)+j\sin\left(-2\pi\frac{1}{5}n\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(1\cdot\left(\cos\left(0\right)+j\sin\left(0\right)\right)+(-2)\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)+\right.$$

$$+3\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}2\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}2\right)\right)+(-4)\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}3\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}3\right)\right)+$$

$$\left.+5\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}4\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}4\right)\right)\right)=\frac{1}{5}\left(1\cdot\left(1\right)+(-2)\cdot\left(0.31-0.95j\right)+\right.$$

$$\left.+3\cdot\left(-0.81-0.59j\right)+(-4)\cdot\left(-0.81+0.59j\right)+5\cdot\left(0.31+0.95j\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(2.74+2.52j\right)=0.55+0.5j,$$

$$c[2]=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x\left[n\right]e^{-j2\pi\frac{2}{5}n}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x\left[n\right]\left(\cos\left(-2\pi\frac{2}{5}n\right)+j\sin\left(-2\pi\frac{2}{5}n\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(1\cdot\left(\cos\left(0\right)+j\sin\left(0\right)\right)+(-2)\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}2\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}2\right)\right)+\right.$$

$$+3\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}4\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}4\right)\right)+(-4)\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}6\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}6\right)\right)+$$

$$\left.+5\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}8\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}8\right)\right)\right)=\frac{1}{5}\left(1\cdot\left(1\right)+(-2)\cdot\left(-0.81-0.59j\right)+\right.$$

$$\left.+3\cdot\left(0.31+0.95j\right)+(-4)\cdot\left(0.31-0.95j\right)+5\cdot\left(-0.81+0.59j\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(-1.74+10.78j\right)=-0.35+2.16j,$$

$$c[3]=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x\left[n\right]e^{-j2\pi\frac{3}{5}n}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x\left[n\right]\left(\cos\left(-2\pi\frac{3}{5}n\right)+j\sin\left(-2\pi\frac{3}{5}n\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(1\cdot\left(\cos\left(0\right)+j\sin\left(0\right)\right)+(-2)\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}3\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}3\right)\right)+\right.$$

$$+3\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}6\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}6\right)\right)+(-4)\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}9\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}9\right)\right)+$$

$$\left.+5\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}12\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}12\right)\right)\right)=\frac{1}{5}\left(1\cdot\left(1\right)+(-2)\cdot\left(-0.81+0.59j\right)+\right.$$

$$\left.+3\cdot\left(0.31-0.95j\right)+(-4)\cdot\left(0.31+0.95j\right)+5\cdot\left(-0.81-0.59j\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(-1.74-10.78j\right)=-0.35-2.16j,$$

$$c[4]=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x\left[n\right]e^{-j2\pi\frac{4}{5}n}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x\left[n\right]\left(\cos\left(-2\pi\frac{4}{5}n\right)+j\sin\left(-2\pi\frac{4}{5}n\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(1\cdot\left(\cos\left(0\right)+j\sin\left(0\right)\right)+(-2)\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}4\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}4\right)\right)+\right.$$

$$+3\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}8\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}8\right)\right)+(-4)\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}12\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}12\right)\right)+$$

$$\left.+5\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}16\right)+j\sin\left(-\frac{2\pi}{5}16\right)\right)\right)=\frac{1}{5}\left(1\cdot\left(1\right)+(-2)\cdot\left(0.31+0.95j\right)+\right.$$

$$\left.+3\cdot\left(-0.81+0.59j\right)+(-4)\cdot\left(-0.81-0.59j\right)+5\cdot\left(0.31-0.95j\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(2.74-2.52j\right)=0.55-0.5j.$$

Комплексний спектр сигналу $x[n]$:
$c[m]=[0.6,0.55+0.5j,-0.35+2.16j,-0.35-2.16j,0.55-0.5j].$

Розрахуємо амплітудний спектр як модуль комплексного спектру:

$$A[m]=\left|c[m]\right|=\sqrt{\left(\mathrm{Re}(c[m])\right)^2+\left(\mathrm{Im}(c[m])\right)^2},$$

$$A[0]=\sqrt{0.6^2}=0.6,$$

$$A[1]=\sqrt{0.55^2+0.5^2}=0.74,$$

$$A[2]=\sqrt{(-0.35)^2+2.16^2}=2.19,$$

$$A[3]=\sqrt{(-0.35)^2+(-2.16)^2}=2.19,$$

$$A[4]=\sqrt{0.55^2+(-0.5)^2}=0.74.$$

Амплітудний спектр сигналу $x[n]$: $A[m]=[0.6, 0.74, 2.19, 2.19, 0.74]$.

Розрахуємо фазовий спектр як аргумент комплексного спектру:

$$\varphi[m]=arctg\frac{\mathrm{Im}(c[m])}{\mathrm{Re}(c[m])},$$

$$\varphi[0]=arctg\left(\frac{0}{0.6}\right)=0,$$

$$\varphi[1]=arctg\left(\frac{0.5}{0.55}\right)=0.74,$$

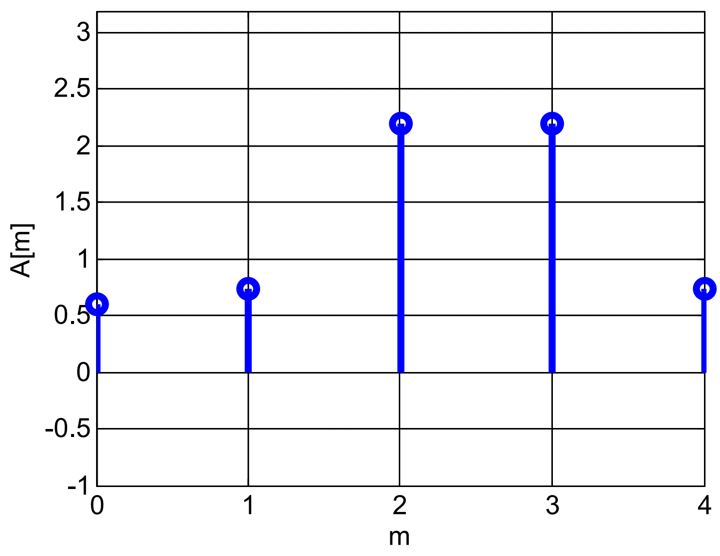
$$\varphi[2]=arctg\left(-\frac{2.16}{0.35}\right)=-1.41,$$

$$\varphi[3]=arctg\left(\frac{2.16}{0.35}\right)=1.41,$$

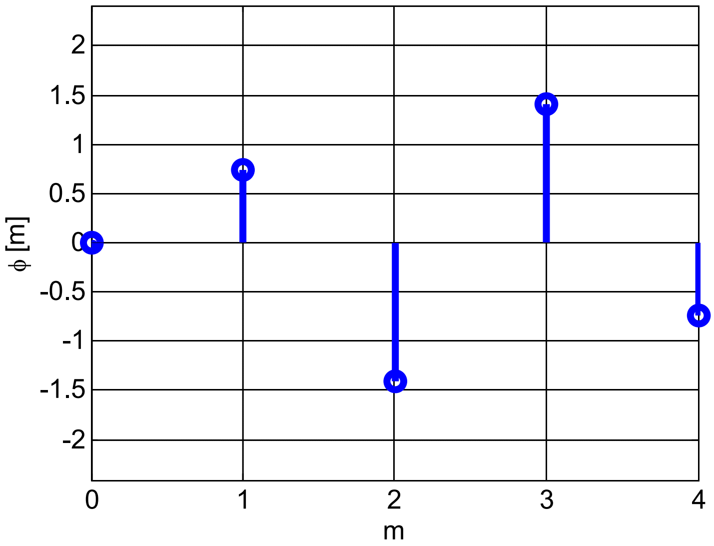
$$\varphi[4]=arctg\left(-\frac{0.5}{0.55}\right)=-0.74.$$

Фазовий спектр сигналу $x[n]$: $\varphi[m]=[0, 0.74, -1.41, 1.41, -0.74]$.

Графік амплітудного спектру сигналу $x[n]$:



Фазовий спектр дискретного сигналу $x[n]$:



4.2.2. Виконати обернене перетворення Фурьє спектра з попередньої задачі, отримати сигнал $x[n]$. В розрахунках використовувати округлення до сотих при записі остаточного результата. Розрахувати середньоквадратичне відхилення між початковим і відновленим сигналом.

В даному випадку формула оберненого перетворення Фурьє спектра з попередньої задачі матиме вигляд:

$$x_{відн}[n] = \sum_{m=0}^{4} c[m] e^{j2\pi \frac{m}{N} n}.$$

Розрахуємо відліки відновленого сигналу:

$$x_{відн}[0] = \sum_{m=0}^{4} c[m] e^{j2\pi \frac{m}{N} 0} = \sum_{m=0}^{4} c[m] = 0.6 + (0.55 + 0.5j) + (-0.35 + 2.16j) +$$

$$+(-0.35 - 2.16j) + (0.55 - 0.5j) = 1,$$

$$x_{відн}[1]=\sum_{m=0}^{4}c[m]e^{j2\pi\frac{m}{5}1}=\sum_{m=0}^{4}c[m]\left(\cos\left(2\pi\frac{m}{5}1\right)+j\sin\left(2\pi\frac{m}{5}1\right)\right)=$$

$$=(0.6)\cdot(\cos(0)+j\sin(0))+(0.55+0.5j)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)+$$

$$+(-0.35+2.16j)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}2\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}2\right)\right)+(-0.35-2.16j)\times$$

$$\times\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}3\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}3\right)\right)+(0.55-0.5j)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}4\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}4\right)\right)=$$

$$=0.6\cdot(1)+(0.55+0.5j)\cdot(0.31+0.95j)+(-0.35+2.16j)\cdot(-0.81+0.59j)+$$

$$+(-0.35-2.16j)\cdot(-0.81-0.59j)+(0.55-0.5j)\cdot(0.31-0.95j)=$$

$$=0.6+0.34-0.95+0.57-2.55=-1.99,$$

$$x_{відн}[2]=\sum_{m=0}^{4}c[m]e^{j2\pi\frac{m}{5}2}=\sum_{m=0}^{4}c[m]\left(\cos\left(2\pi\frac{m}{5}2\right)+j\sin\left(2\pi\frac{m}{5}2\right)\right)=$$

$$=(0.6)\cdot(\cos(0)+j\sin(0))+(0.55+0.5j)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}2\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}2\right)\right)+$$

$$+(-0.35+2.16j)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}4\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}4\right)\right)+(-0.35-2.16j)\times$$

$$\times\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}6\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}6\right)\right)+(0.55-0.5j)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}8\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}8\right)\right)=$$

$$=0.6\cdot(1)+(0.55+0.5j)\cdot(-0.81+0.59j)+(-0.35+2.16j)\cdot(0.31-0.95j)+$$

$$+(-0.35-2.16j)\cdot(0.31+0.95j)+(0.55-0.5j)\cdot(-0.81-0.59j)=$$

$$=0.6-0.89-0.59-0.22+4.1=3,$$

$$x_{відн}[3]=\sum_{m=0}^{4}c[m]e^{j2\pi\frac{m}{5}3}=\sum_{m=0}^{4}c[m]\left(\cos\left(2\pi\frac{m}{5}3\right)+j\sin\left(2\pi\frac{m}{5}3\right)\right)=$$

$$=(0.6)\cdot(\cos(0)+j\sin(0))+(0.55+0.5j)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}3\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}3\right)\right)+$$

$$+(-0.35+2.16j)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}6\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}6\right)\right)+(-0.35-2.16j)\times$$

$$\times\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}9\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}9\right)\right)+(0.55-0.5j)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}12\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}12\right)\right)=$$

$$=0.6\cdot(1)+(0.55+0.5j)\cdot(-0.81-0.59j)+(-0.35+2.16j)\cdot(0.31+0.95j)+$$

$$+(-0.35-2.16j)\cdot(0.31-0.95j)+(0.55-0.5j)\cdot(-0.81+0.59j)=$$

$$=0.6-0.89+0.59-0.22-4.1=-4.02,$$

$$x_{відн}[4]=\sum_{m=0}^{4}c\left[m\right]e^{j2\pi\frac{m}{5}4}=\sum_{m=0}^{4}c\left[m\right]\left(\cos\left(2\pi\frac{m}{5}4\right)+j\sin\left(2\pi\frac{m}{5}4\right)\right)=$$
$$=\left(0.6\right)\cdot\left(\cos\left(0\right)+j\sin\left(0\right)\right)+\left(0.55+0.5j\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}4\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}4\right)\right)+$$
$$+\left(-0.35+2.16j\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}8\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}8\right)\right)+\left(-0.35-2.16j\right)\times$$
$$\times\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}12\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}12\right)\right)+\left(0.55-0.5j\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}16\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{5}16\right)\right)=$$
$$=0.6\cdot\left(1\right)+(0.55+0.5j)\cdot\left(0.31-0.95j\right)+\left(-0.35+2.16j\right)\cdot\left(-0.81-0.59j\right)+$$
$$+\left(-0.35-2.16j\right)\cdot\left(-0.81+0.59j\right)+\left(0.55-0.5j\right)\cdot\left(0.31+0.95j\right)=$$
$$=0.6+0.6455+1.5528+1.5528+0.6455=4.9966\approx 5.00.$$

Відновлений сигнал: $x_{відн}[n]=[1,-1.99,\ 3,-4.02,5.00]$.

Розрахуємо середньоквадратичне відхилення між початковим і відновленим сигналом за формулою

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-x_{відн}[n]\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{5}\left(\left(1-1\right)^2+\left(-2+1.99\right)^2+\left(3-3\right)^2+\left(-4+4.02\right)^2+\left(5-5.00\right)^2\right)}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{5}\left(0^2+0.01^2+0^2+0.02^2+0^2\right)}\approx 0.01.$$

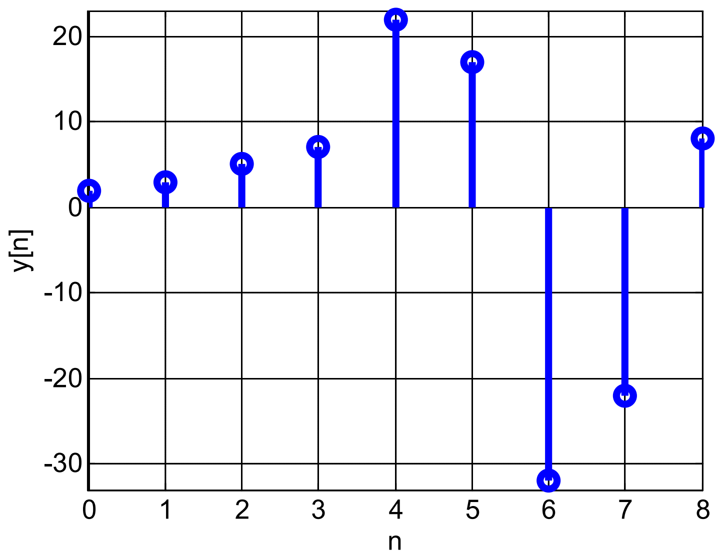
4.2.3. Розрахувати спектр вихідного сигналу з використанням комплексної частотної характеристики та спектру вхідного сигналу. Розрахувати вихідний сигнал за допомогою оберненого перетворення Фурьє; порівняти із вихідним сигналом, отриманим з використанням імпульсної характеристики. Побудувати графіки АЧХ, ФЧХ системи, спектрів вхідного та вихідного сигналів.

Вхідний сигнал: $x\left[n\right]=\left[2,\text{-}3,4,6,\text{-}8\right]$, *імпульсна характеристика* $h\left[n\right]=\left[1,3,5,2,-1\right]$.

Спочатку розрахуємо вихідний сигнал $y\left[n\right]$ з допомогою рівняння згортки: $y\left[n\right]=h\left[n\right]*x\left[n\right]$. Програма для розрахунку матиме вигляд:

```
x=[2,-3,4,6,-8];
h=[1, 3,5,2,-1];
y=conv(x,h);
```

Графік вихідного сигналу наведено на рисунку:



Розрахуємо цей самий вихідний сигнал, але з використанням спектрального представлення. Відомо, що в частотній області спектри вихідного $Y(j\omega)$ та вхідного $X(j\omega)$ сигналу зв'язані між собою через комплексну частотну характеристику системи $K(j\omega)$:

$$Y(j\omega) = K(j\omega) \cdot X(j\omega).$$

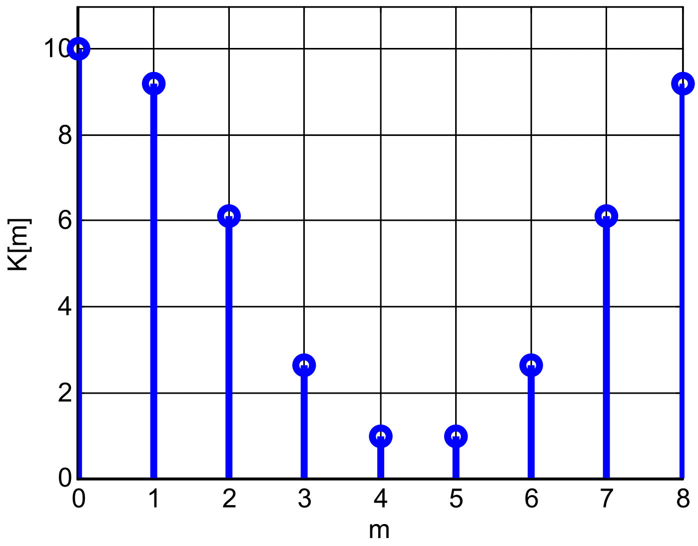
Для отримання КЧХ треба виконати пряме перетворення Фурьє від імпульсної характеристики. Зауважимо, що в загальному випадку при виконанні перетворення Фурьє дискретних скінченних сигналів кількість відліків одного періоду спектру дискретної послідовності дорівнює кількості відліків сигналу в часовій області (в нашому випадку – п'ять відліків). Але оскільки вихідний сигнал, отриманий по імпульсній характеристиці, має дев'ять відліків, то для подальшого порівняння треба мати стільки ж відліків і в вихідному сигналі, що буде отриманий по оберненому перетворенню Фурьє.

Модифікуємо функцію, яка розраховує пряме перетворення Фурьє, щоб отримувати по дев'ять відліків КЧХ та спектру вхідного сигналу.

Отримання КЧХ:

```
clc;
close all
clear all
h=[1, 3,5,2,-1];
k=fft(h,9);
K=abs(k);
```

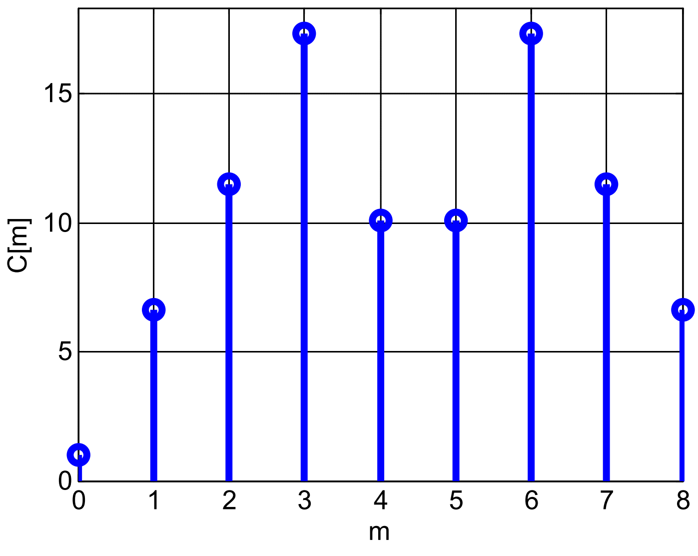
Графік АЧХ:



Отримання комплексного спектру та амплітудного спектру сигналу:

```
x=[2,-3,4,6,-8];
sx=fft(x,9);
C=abs(sx);
```

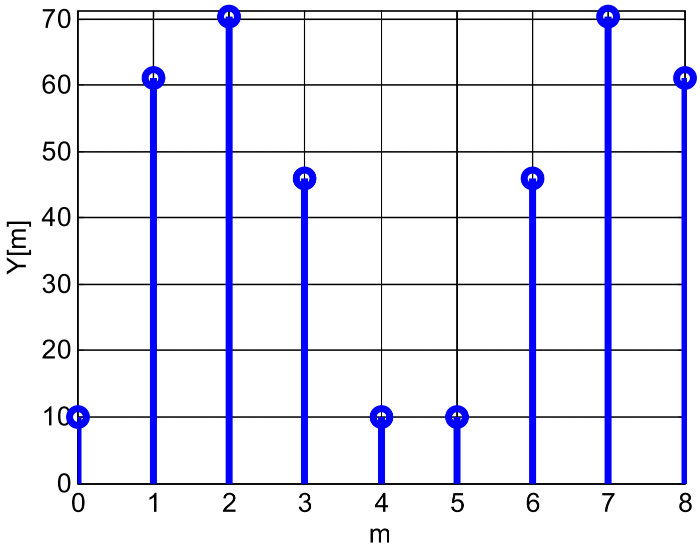
Графік амплітудного спектру вхідного сигналу:



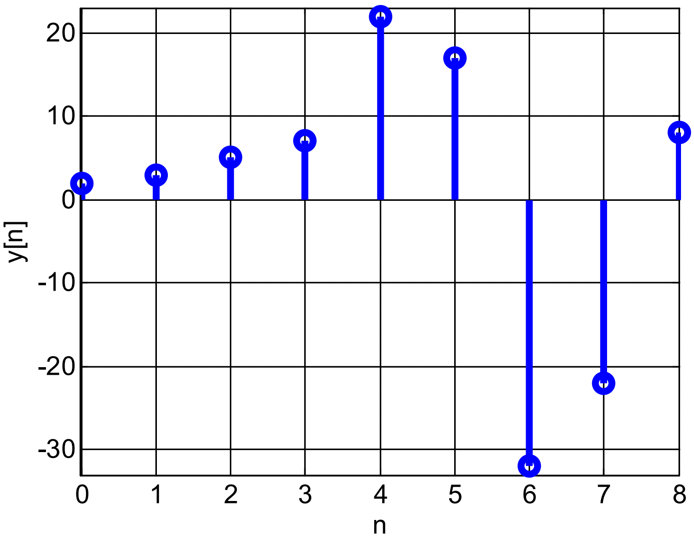
Перемножимо комплексний спектр вхідного сигналу на комплексну частотну характеристику системи для отримання комплексного спектру вихідного сигналу.

```
x=[2,-3,4,6,-8];
h=[1, 3,5,2,-1];
k=fft(h,9);
sx=fft(x,9);
sy=sx.*k;
y=ifft(sy);
```

Амплітудний спектр вихідного сигналу наведений на рисунку:



Виконаємо обернене перетворення Фурьє і остаточно отримаємо значення вихідного сигналу $y[n]$, які наведені на рисунку:



Можна пересвідчитись, що сигнал, отриманий з використанням імпульсної характеристики та з використанням КЧХ, є ідентичними.

4.2.4. Розрахувати спектр Уолша дискретного сигналу $x[n]=[1,-2,3,-4,5]$. *Побудувати графік спектру сигналу.*

В загальному випадку базис Уолша при отриманні його як рядків матриці Аламара можна задати лише для просторів, розмірність яких є степенем двійки ($N=2,4,8,16,\ldots$). Оскільки сигнал складається з п’яти відліків, то доповнимо його нулями до найближчої степені двійки:

$x[n]=[1,-2,3,-4,5,0,0,0]$.

Сформуємо матрицю Адамара H_N 8-го порядку ($N=2^l$, $l=3$):

$$H_8=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1&-1&1&1&-1\end{pmatrix}.$$

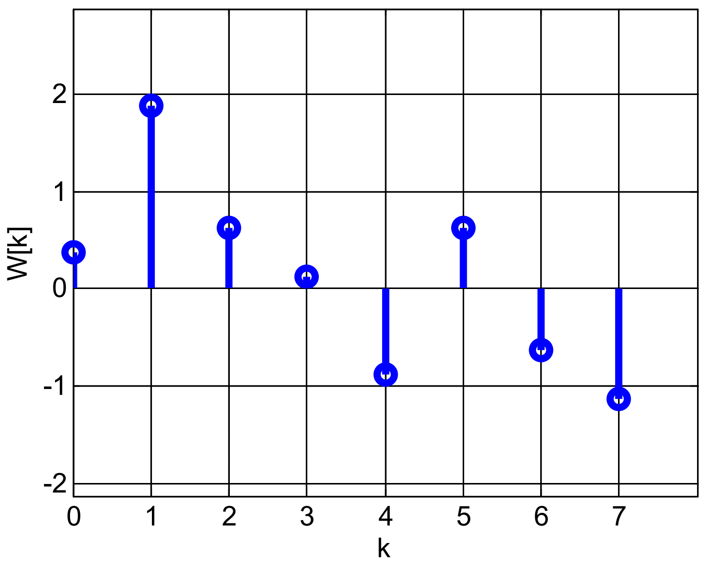
Для отримання спектру сигналу за Уолшем скористаємось виразом:

$W[k]=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}x[n]had(k,n)$ та розрахуємо пряме перетворення Уолша в матричній формі, :

$$\mathbf{W}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1&-1&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\\5\\0\\0\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1-2+3-4+5+0+0+0\\1+2+3+4+5+0+0+0\\1-2-3+4+5+0+0+0\\1+2-3-4+5+0+0+0\\1-2+3-4-5+0+0+0\\1+2+3+4-5+0+0+0\\1-2-3+4-5+0+0+0\\1+2-3-4-5+0+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/8\\15/8\\5/8\\1/8\\-7/8\\5/8\\-5/8\\-9/8\end{pmatrix}.$$

Графік спекру наведено на рисунку:



<u>Відповідь:</u> спектр сигналу за Уолшем дорівнює $W[k]=\left[\frac{3}{8},\frac{15}{8},\frac{5}{8},\frac{1}{8},\frac{-7}{8},\frac{5}{8},\frac{-5}{8},\frac{-9}{8}\right]$.

4.2.5. Виконати обернене перетворення Уолша спектра з попередньої задачі, отримати сигнал $x[n]$.

Виконаємо обернене перетворення, проводячи розрахунки в матричній формі за виразом $x[n]=\sum_{k=0}^{N-1}W[k]had(k,n)$:

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/8 \\ 15/8 \\ 5/8 \\ 1/8 \\ -7/8 \\ 5/8 \\ -5/8 \\ -9/8 \end{pmatrix}=$$

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 3/8+15/8+5/8+1/8-7/8+5/8-5/8-9/8 \\ 3/8-15/8+5/8-1/8-7/8-5/8-5/8+9/8 \\ 3/8+15/8-5/8-1/8-7/8+5/8+5/8+9/8 \\ 3/8-15/8-5/8+1/8-7/8-5/8+5/8-9/8 \\ 3/8+15/8+5/8+1/8+7/8-5/8+5/8+9/8 \\ 3/8-15/8+5/8-1/8+7/8+5/8+5/8-9/8 \\ 3/8+15/8-5/8-1/8+7/8-5/8-5/8-9/8 \\ 3/8-15/8-5/8+1/8+7/8+5/8-5/8+9/8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В результаті отримано сигнал $x\left[n\right]=\left[1,-2,3,-4,5,0,0,0\right]$.

4.2.6. Виконати z-перетворення дискретного сигналу $x\left[n\right]=\left[1,-2,3,-4,5\right]$.

$$X\left(z\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x\left[n\right]z^{-n}=1z^{0}-2z^{1}+3z^{2}-4z^{3}+5z^{4}=1-2z^{1}+3z^{2}-4z^{3}+5z^{4}.$$

4.2.7. Знайти характеристичну функцію системи з імпульсною характеристикою $h\left[n\right]=\left[1,5,-3,0,-1,2,1\right]$.

Відомо, що характеристична функція дорівнює z-перетворенню імпульсної характеристики системи:

$$H(z)=\frac{Y\left(z\right)}{X\left(z\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}h[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{6}h[n]z^{-n}=1z^{-0}+5z^{-1}-3z^{-2}+0z^{-3}-1z^{-4}+2z^{-5}+1z^{-6}=$$

$$=1+5z^{-1}-3z^{-2}-z^{-4}+2z^{-5}+z^{-6}.$$

4.2.8. Записати характеристичну функцію системи, яка задана різницевим рівнянням $y\left[n\right]-2y\left[n-1\right]+8y\left[n-4\right]=x\left[n\right]-4x\left[n-1\right]+5x\left[n-3\right]$.

І різницеве рівняння, і характеристична функція описують зв'язок між вхідним та вихідним сигналами дискретної системи, отже можуть бути отримані одне з іншого. Характеристична функція за визначенням є відношенням z-перетворень вихідного та вхідного сигналів:

$$H\left(z\right)=\frac{Y\left(z\right)}{X\left(z\right)}.$$

Для отримання цих z-перетворень скористаємось різницевим рівнянням. В нього входять вхідний та вихідний сигнали $x\left[n\right]$ та $y\left[n\right]$, а також їх затримані копії. Застосуємо z-перетворення до лівої і правої частин різницевого рівняння:

$$Z\left(y[n]-2y[n-1]+8y[n-4]\right)=Z\left(x[n]-4x[n-1]+5x[n-3]\right).$$

Скористаємось властивостями адитивності та однорідності z-перетворення:

$$Z\left(y[n]\right)-Z\left(2y[n-1]\right)+Z\left(8y[n-4]\right)=Z\left(x[n]\right)-Z\left(4x[n-1]\right)+Z\left(5x[n-3]\right),$$

$$Y(z)-2Z\left(y[n-1]\right)+8Z\left(y[n-4]\right)=X(z)-4z\left(x[n-1]\right)+5Z\left(x[n-3]\right).$$

Скористаємось властивістю z-перетворення щодо зв’язку між z-перетвореннями затриманої та незатриманої послідовності:

$$Y(z)-2z^{-1}Y(z)+8z^{-4}Y(z)=X(z)-4z^{-1}X(z)+5z^{-3}X(z).$$

Приведемо подібні доданки та виразимо відношення $\frac{Y(z)}{X(z)}$, отримавши характеристичну функцію:

$$Y(z)\left(1-2z^{-1}+8z^{-4}\right)=X(z)\left(1-4z^{-1}+5z^{-3}\right),$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-4z^{-1}+5z^{-3}}{1-2z^{-1}+8z^{-4}}=H(z).$$

4.3. Задачі для самостійного опрацювання

4.3.1. Записати характеристичну функцію системи, яка задана різницевим рівнянням $y[n]=x[n]+x[n-1]$.

4.3.2. Записати характеристичну функцію системи, яка задана різницевим рівнянням $y[n]+2y[n-1]-3y[n-2]=x[n]$.

4.3.3. Записати характеристичну функцію системи, яка задана різницевим рівнянням $y[n]+2y[n-1]=x[n]+2x[n-1]-3x[n-2]+4x[n-3]$.

4.3.4. Розрахувати спектр Уолша дискретного сигналу $x[n]=[0,5,7,-4,2]$. *Побудувати графік спектру сигналу.*

4.3.5. Розрахувати спектр за Фурьє дискретного сигналу $x[n]=[1,4,3,2,5]$. *Побудувати графіки амплітудного та фазового спектру сигналу.*

4.3.6. Виконати обернене перетворення Фурьє спектра з попередньої задачі, отримати сигнал $x[n]$. *Розрахувати середньоквадратичне відхилення між початковим і відновленим сигналом при округлені до десятих.*

4.3.7. Розрахувати спектр за Фурьє дискретного сигналу $x[n]=[-3,1,-2,4,1,2]$. *Побудувати графіки амплітудного та фазового спектру сигналу.*

4.3.8. Виконати обернене перетворення Фурьє спектра з попередньої задачі, отримати сигнал $x[n]$. *Розрахувати середньоквадратичне відхилення між початковим і відновленим сигналом при округлені до сотих.*

4.3.9. Розрахувати спектр Уолша дискретного сигналу $x[n]=[2,-9,8,0,1,-5,3,1,3]$. *Побудувати графік спектру сигналу.*

4.3.9. Виконати обернене перетворення Уолша спектра з попередньої задачі, отримати сигнал $x[n]$.

4.3.10. Виконати z-перетворення дискретного сигналу $x[n]=[1,-2,3,-4,5]$.

4.3.11. Виконати z-перетворення дискретного сигналу $x[n]=[43,-222,13,-34,51,2,14,0,-50]$.

4.3.12. Знайти характеристичну функцію системи з імпульсною характеристикою $h[n]=[1,8,1,-1,9,8,-5]$.

4.3.13. Знайти характеристичну функцію системи з імпульсною характеристикою $h[n]=[12,3,-2,1,9,15,-6,4,2,3]$.

4.3.14. Знайти характеристичну функцію системи з імпульсною характеристикою $h[n]=[1,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$.

5. Кореляційний аналіз дискретних сигналів

5.1. Основні теоретичні відомості

Взаємнокореляційна функція (ВКФ) для скінченних дискретних сигналів визначається за виразом:

$$B_{12}[j] = \frac{r_{12}[j]}{\frac{1}{N}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x_1^2[n] \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2[n]}},$$

де $r_{12}[j] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]x_2[n-j]$,

j – параметр, який відповідає зміщенню сигналів один відносно одного. Це зміщення в загальному випадку повинне набувати значень від $-\infty$ до $+\infty$, але на практиці можна розраховувати значення ВКФ лише для тих зміщень, для яких вона ненульова.

Значення ВКФ при $j = 0$ називають *коефіцієнтом (взаємної) кореляції* двох сигналів.

Якщо $x_1[n] = x_2[n]$, то говорять по автокореляційну функцію (АКФ). Оскільки АКФ є парною функцією, то при розрахунках достатньо використовувати лише додатні або лише від'ємні значення зміщення j.

5.2. Приклади розв'язання типових задач

5.2.1. Розрахувати коефіцієнт кореляції сигналів $x[n] = [-1,2,4,3,-6]$ *та* $y[n] = [2,1,5,-10,8]$.

Для знаходження коефіцієнту кореляції скористаємось формулою взаємнокореляційної функції для скінченних дискретних сигналів для випадку, коли зсув між сигналами $j = 0$.

Розрахуємо чисельник виразу:

$$r_{12}[0]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_2[n-0]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_2[0]+x_1[1]x_2[1]+x_1[2]x_2[2]+x_1[3]x_2[3]+x_1[4]x_2[4])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot 2+2\cdot 1+4\cdot 5+3\cdot(-10)+(-6)\cdot 8)=$$

$$=\frac{1}{5}(-2+2+20-30-48)=-11{,}6$$

Розрахуємо знаменник виразу:

$$\frac{1}{N}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1}x_1^2[n]\cdot\sum_{n=0}^{N-1}x_2^2[n]}=$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{\left(x_1^2[0]+x_1^2[1]+x_1^2[2]+x_1^2[3]+x_1^2[4]\right)\left(x_2^2[0]+x_2^2[1]+x_2^2[2]+x_2^2[3]+x_2^2[4]\right)}=$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{\left((-1)^2+2^2+4^2+3^2+(-6)^2\right)\left(2^2+1^2+5^2+(-10)^2+8^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{(1+4+16+9+36)(4+1+25+100+64)}=\frac{1}{5}\sqrt{66\cdot 194}=22{,}63$$

Звідси отримаємо значення коефіцієнту кореляції двох сигналів:

$$B_{12}[0]=\frac{-11{,}6}{22{,}63}=-0{,}51.$$

5.2.2. Розрахувати значення взаємнокореляційної функції сигналів $x[n]=[-1,2,4,3,-6]$ *та* $y[n]=[2,1,5,-10,8]$. *Побудувати графік ВКФ.*

Для розрахунку взаємнокореляційної функції скористаємося формулою взаємнокореляційної функції для скінченних дискретних сигналів. Спочатку розрахуємо знаменник виразу, оскільки він буде незмінним для кожного із відліків ВКФ.

$$\frac{1}{N}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1}x_1^2[n]\cdot\sum_{n=0}^{N-1}x_2^2[n]}=$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{\left(x_1^2[0]+x_1^2[1]+x_1^2[2]+x_1^2[3]+x_1^2[4]\right)\left(x_2^2[0]+x_2^2[1]+x_2^2[2]+x_2^2[3]+x_2^2[4]\right)}=$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{\left((-1)^2+2^2+4^2+3^2+(-6)^2\right)\left(2^2+1^2+5^2+(-10)^2+8^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{(1+4+16+9+36)(4+1+25+100+64)}=\frac{1}{5}\sqrt{66\cdot194}=22,63$$

Далі почергово розрахуємо значення взаємнокореляційної функції для кожного значення зміщення сигналів один відносно одного. Почнемо зі зміщення на -4 відліки:

$$r_{12}[-4]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_2[n+4]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_2[0+4]+x_1[1]x_2[1+4]+x_1[2]x_2[2+4]+x_1[3]x_2[3+4]+x_1[4]x_2[4+4])=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_2[4]+x_1[1]x_2[5]+x_1[2]x_2[6]+x_1[3]x_2[7]+x_1[4]x_2[8])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot8+2\cdot0+4\cdot0+3\cdot0+(-6)\cdot0)=\frac{1}{5}\left((-1)\cdot8\right)=-1,6.$$

Звідси знаходимо значення відліку взаємнокореляційної функції

$$B_{12}[-4]=\frac{-1,6}{22,63}=-0,07.$$

Для знаходження наступних відліків проводимо аналогічні дії:

$$r_{12}[-3]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_2[n+3]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_2[3]+x_1[1]x_2[4]+x_1[2]x_2[5]+x_1[3]x_2[6]+x_1[4]x_2[7])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot(-10)+2\cdot8+4\cdot0+3\cdot0+(-6)\cdot0)=\frac{1}{5}\left((-1)\cdot(-10)+2\cdot8\right)=5,2.$$

Звідси

$$B_{12}[-3]=\frac{5,2}{22,63}=0,23.$$

$$r_{12}[-2]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_2[n+2]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_2[2]+x_1[1]x_2[3]+x_1[2]x_2[4]+x_1[3]x_2[5]+x_1[4]x_2[6])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot 5+2\cdot(-10)+4\cdot 8+3\cdot 0+(-6)\cdot 0)=\frac{1}{5}\left(\left(-1\right)\cdot 5+2\cdot(-10)+4\cdot 8\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(-5-20+32\right)=1,4.$$

Звідси

$$B_{12}[-2]=\frac{1,4}{22,63}=0,06.$$

$$r_{12}[-1]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_2[n+1]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_2[1]+x_1[1]x_2[2]+x_1[2]x_2[3]+x_1[3]x_2[4]+x_1[4]x_2[5])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot 1+2\cdot 5+4\cdot(-10)+3\cdot 8+(-6)\cdot 0)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\left(-1\right)\cdot 1+2\cdot 5+4\cdot(-10)+3\cdot 8\right)=\frac{1}{5}\left(-1+10-40+24\right)=-1,4.$$

Звідси

$$B_{12}[-1]=\frac{-1,4}{22,63}=-0,06.$$

$$r_{12}[0]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_2[n-0]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_2[0]+x_1[1]x_2[1]+x_1[2]x_2[2]+x_1[3]x_2[3]+x_1[4]x_2[4])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot 2+2\cdot 1+4\cdot 5+3\cdot(-10)+(-6)\cdot 8)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(-2+2+20-30-48\right)=-11,6.$$

Звідси

$$B_{12}[0]=\frac{-11,6}{22,63}=-0,51.$$

Зауважимо, що це значення дорівнює коефіцієнту кореляції між двома сигналами.

$$r_{12}[1]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_2[n-1]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_2[-1]+x_1[1]x_2[0]+x_1[2]x_2[1]+x_1[3]x_2[2]+x_1[4]x_2[3])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot 0+2\cdot 2+4\cdot 1+3\cdot 5+(-6)\cdot(-10))=\frac{1}{5}(2\cdot 2+4\cdot 1+3\cdot 5+(-6)\cdot(-10))=$$

$$=\frac{1}{5}\left(4+4+15+60\right)=16,6.$$

Звідси

$$B_{12}[1]=\frac{16,6}{22,63}=0,73\,.$$

$$r_{12}[2]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_2[n-2]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_2[-2]+x_1[1]x_2[-1]+x_1[2]x_2[0]+x_1[3]x_2[1]+x_1[4]x_2[2])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot 0+2\cdot 0+4\cdot 2+3\cdot 1+(-6)\cdot 5)=\frac{1}{5}(4\cdot 2+3\cdot 1+(-6)\cdot 5)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(8+3-30\right)=-3,8.$$

Звідси

$$B_{12}[2]=\frac{-3,8}{22,63}=-0,17\,.$$

$$r_{12}[3]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_2[n-3]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_2[-3]+x_1[1]x_2[-2]+x_1[2]x_2[-1]+x_1[3]x_2[0]+x_1[4]x_2[1])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot 0+2\cdot 0+4\cdot 0+3\cdot 2+(-6)\cdot 1)=\frac{1}{5}(3\cdot 2+(-6)\cdot 1)=0.$$

Звідси

$$B_{12}[3]=\frac{0}{22,63}=0\,.$$

$$r_{12}[4]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_2[n-4]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_2[-4]+x_1[1]x_2[-3]+x_1[2]x_2[-2]+x_1[3]x_2[-1]+x_1[4]x_2[0])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot 0+2\cdot 0+4\cdot 0+3\cdot 0+(-6)\cdot 2)=\frac{1}{5}((-6)\cdot 2)=-2,4.$$

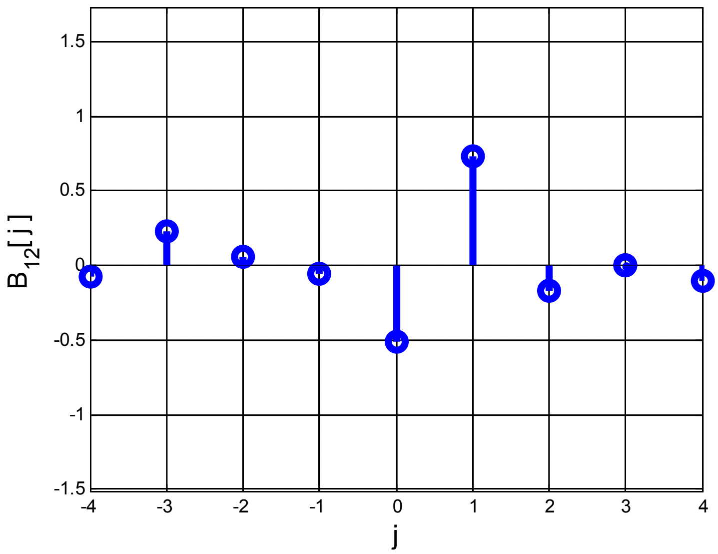
Звідси

$$B_{12}[4]=\frac{-2,4}{22,63}=-0,1.$$

Значення ВКФ для більших зміщень будуть рівними нулю. В результаті отримаємо значення взаємнокореляційної функції:

$$B_{12}=[-0,07\quad 0,23\quad 0,06\quad -0,06\quad -0,51\quad 0,73\quad -0,17\quad 0\quad -0,1].$$

Побудуємо графік отриманої функції:



Варто відмітити, що ця функція є функцією загального виду (ані парною, ані непарною) – значення ВКФ для додатних та від'ємних зміщень, однакових за модулем, нерівні між собою.

5.2.3. Розрахувати значення автокореляційної функції сигналу $x[n]=[-1,2,4,3,-6]$. Побудувати графік АКФ.

Для розрахунку автокореляційної функції скористаємося тією ж формулою, що і для взаємнокореляційної функції для скінченних дискретних сигналів, де замість функції $x_2[n]$ в чисельнику підставимо $x_1[n]$. Тобто будемо виконувати зсув сигналу відносно самого себе. Розрахуємо знаменник виразу так як він буде незмінним для кожного із значень відліків.

$$\frac{1}{N}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x_1^2[n] \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2[n]} =$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{\left(x_1^2[0] + x_1^2[1] + x_1^2[2] + x_1^2[3] + x_1^2[4]\right)\left(x_2^2[0] + x_2^2[1] + x_2^2[2] + x_2^2[3] + x_2^2[4]\right)} =$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{\left((-1)^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2 + (-6)^2\right)^2} = \frac{1}{5}\left(1 + 4 + 16 + 9 + 36\right) = 13{,}2.$$

Далі почергово розрахуємо значення взаємнокореляційної функції для кожного значення зміщення сигналів один відносно одного. З урахуванням властивостей парності автокореляційної функції достатньо розрахувати її значення лише для від'ємних зміщень:

$$r_{12}[0] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_1[n-0] =$$

$$= \frac{1}{5}(x_1[0]x_1[0] + x_1[1]x_1[1] + x_1[2]x_1[2] + x_1[3]x_1[3] + x_1[4]x_1[4]) =$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 4\cdot 4 + 3\cdot 3 + (-6)\cdot(-6)) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 + 4 + 16 + 9 + 36\right) = 13{,}2.$$

Звідси

$$B_{12}[0] = \frac{13{,}2}{13{,}2} = 1.$$

Як і повинно бути, коефіцієнт кореляції сигналу з самим собою рівний одиниці.

$$r_{12}[1] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_1[n-1] =$$

$$= \frac{1}{5}(x_1[0]x_1[-1] + x_1[1]x_1[0] + x_1[2]x_1[1] + x_1[3]x_1[2] + x_1[4]x_1[3]) =$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 4\cdot 2 + 3\cdot 4 + (-6)\cdot 3) = \frac{1}{5}(2\cdot(-1) + 4\cdot 2 + 3\cdot 4 + (-6)\cdot 3) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-2 + 8 + 12 - 18\right) = 0.$$

Звідси

$$B_{12}[1] = \frac{0}{13{,}2} = 0.$$

$$r_{12}[2]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_1[n-2]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_1[-2]+x_1[1]x_1[-1]+x_1[2]x_1[0]+x_1[3]x_1[1]+x_1[4]x_1[2])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot 0+2\cdot 0+4\cdot(-1)+3\cdot 2+(-6)\cdot 4)=\frac{1}{5}(4\cdot(-1)+3\cdot 2+(-6)\cdot 4)=$$

$$=\frac{1}{5}(-4+6-24)=-4,4.$$

Звідси

$$B_{12}[2]=\frac{-4,4}{13,2}=-0,33.$$

$$r_{12}[3]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_1[n-3]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_1[-3]+x_1[1]x_1[-2]+x_1[2]x_1[-1]+x_1[3]x_1[0]+x_1[4]x_1[1])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot 0+2\cdot 0+4\cdot 0+3\cdot(-1)+(-6)\cdot 2)=\frac{1}{5}(3\cdot(-1)+(-6)\cdot 2)=-3.$$

Звідси

$$B_{12}[3]=\frac{-3}{13,2}=-0,23.$$

$$r_{12}[4]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]x_1[n-4]=$$

$$=\frac{1}{5}(x_1[0]x_1[-4]+x_1[1]x_1[-3]+x_1[2]x_1[-2]+x_1[3]x_1[-1]+x_1[4]x_1[0])=$$

$$\frac{1}{5}((-1)\cdot 0+2\cdot 0+4\cdot 0+3\cdot 0+(-6)\cdot(-1))=\frac{1}{5}((-6)\cdot(-1))=\frac{6}{5}=1,2.$$

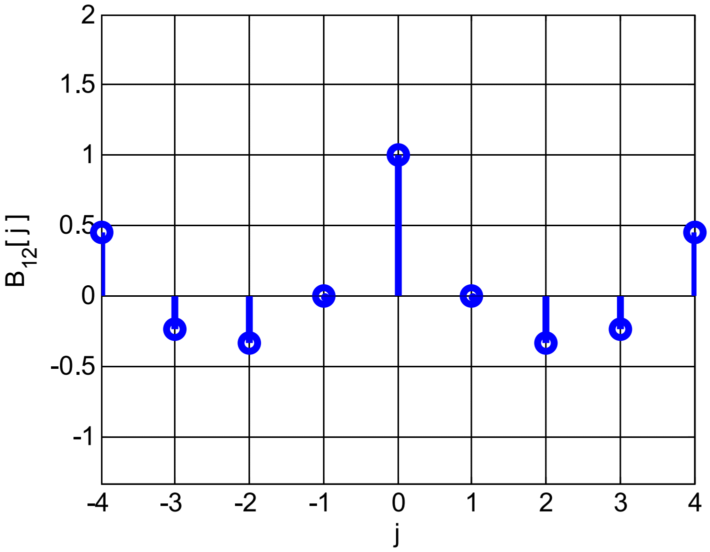
Звідси

$$B_{12}[4]=\frac{1,2}{13,2}=0,09.$$

Всі інші відліки АКФ будуть рівними нулю. Симетрично відобразивши отримані відліки відносно значення $j=0$, отримаємо автокореляційну функцію сигналу

$$B_{12}=[0,09\quad -0,23\quad -0,33\quad 0\quad 1\quad 0\quad -0,33\quad -0,23\quad 0,09].$$

Побудуємо графік отриманої функції:



Варто відмітити, що АКФ є парною функцією, її графік симетричний відносно зміщення 0.

5.3. Задачі для самостійного опрацювання

5.3.1. Розрахувати коефіцієнт кореляції сигналів $x[n]=[5,4,3,2,1]$ *та* $y[n]=[1,2,3,4,5]$

5.3.2. Розрахувати коефіцієнт кореляції сигналів $x[n]=[1,2,3,2,1]$ *та* $y[n]=[1,1,1,-1,-1]$

5.3.3. Розрахувати значення взаємнокореляційної функції сигналів $x[n]=[1,1,1,1,1]$ *та* $y[n]=[1,1,1,-1,-1]$. *Побудувати графік ВКФ.*

5.3.4. Розрахувати значення взаємнокореляційної функції сигналів $x[n]=[1,2,3,2,1]$ *та* $y[n]=[1,1,1,-1,-1]$. *Побудувати графік ВКФ.*

5.3.5. Розрахувати значення автокореляційної функції сигналу $x[n]=[1,1,1,1,1]$. *Побудувати графік АКФ.*

5.3.6. Розрахувати значення автокореляційної функції сигналу $y[n]=[1,2,1,0,1,2,1,0,1,2,1,0,1,2,1]$. *Побудувати графік АКФ.*

6. Фільтрація дискретних сигналів

6.1. Основні теоретичні відомості

Цифровий фільтр – це математичний алгоритм фільтрації, реалізований на апаратному або програмному рівні, який на вході має дискретний вхідний сигнал та генерує дискретний вихідний сигнал. Цифровий фільтр – це дискретна система, яка має потрібну АЧХ та ФЧХ, що відповідає одному з типів фільтрів (рис. 5.2). Особливістю цифрового фільтра є те, що сигнал подається на вхід в оцифрованому вигляді.

За *формою графіку модуля комплексної частотної характеристики* (за видом АЧХ) фільтри ділять на чотири основні типи:

– фільтр нижніх частот (ФНЧ, low-pass filter) – має порівняно великий коефіцієнт передачі на частотах, які знаходяться в околі нульової частоти, і порівняно низький – на інших частотах. Тому такі фільтри зберігають незмінною величину спектральних складових вхідного сигналу на нижніх частотах; говорять, що ФНЧ пропускають низькочастотні сигнали та не пропускають високочастотні;

– фільтр верхніх частот (ФВЧ, high-pass filter) – має високий коефіцієнт передачі на частотах, які більші за деяку частоту f_p, і низький – на частотах від нуля до f_p. Отже, вони пропускають без змін частину спектру вхідного сигналу, яка знаходиться на частотах від f_p до $+\infty$ і не пропускають складові спектру сигналу від 0 до f_p. ФВЧ пропускають високочастотні сигнали;

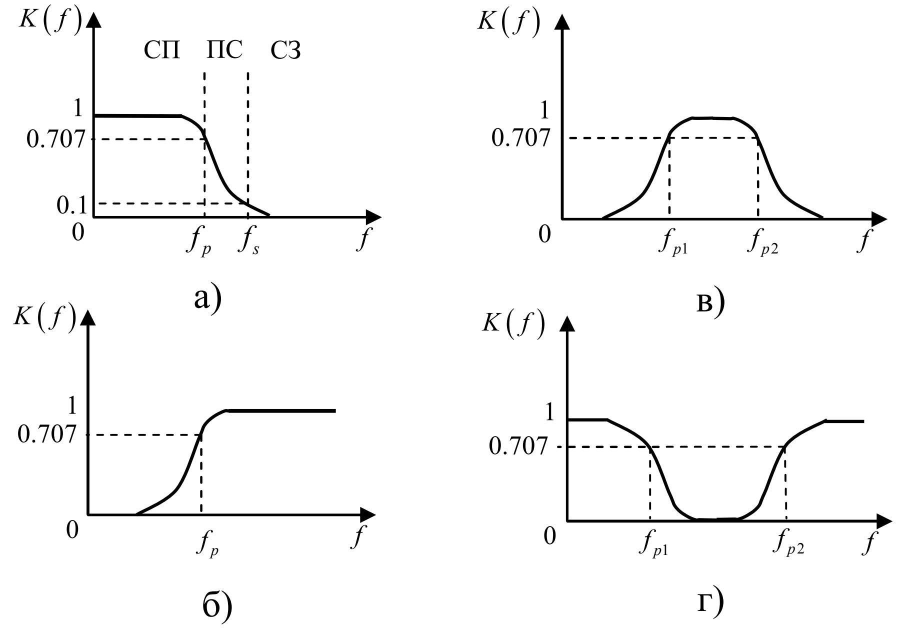
– смуговий фільтр (СФ, band-pass filter) – має великий коефіцієнт передачі лише в певній смузі частот між частотами f_{p1} та f_{p2}. Поза цим проміжком коефіцієнт передачі малий. Отже, на вихід такого фільтра пройдуть лише ті спектральні складові сигналу, які знаходяться в смузі пропускання фільтра, і не пройдуть ті, які лежать від нуля до f_{p1} та від f_{p2} до $+\infty$;

– загороджувальний фільтр (ЗФ, band-stop filter) – є дуальним до смугового: великий коефіцієнт передачі в нього поза проміжком частот від f_{p1} до f_{p2}. Починаючи від нульової частоти і до f_{p1}, а також від f_{p2} до $+\infty$ коефіцієнт передачі великий. Тому при проходженні через такий фільтр сигналу, із його спектру видаляться складові, що лежать між f_{p1} та f_{p2}, а всі інші складові пройдуть на вихід фільтру без змін. Іноді загороджувальний фільтр називають режекторним фільтром. Якщо смуга затримки такого фільтра порівняно вузька, такий загороджувальний фільтр називають іноді фільтром-пробкою (notch-filter).

Проміжок частот, для яких коефіцієнт передачі фільтра є великим, називається *смугою пропускання* (СП, passband). Якщо спектральні складові вхідного сигналу фільтра потрапляють в смугу пропускання, то вони не зазнають ослаблення, проходять на вихід фільтра без змін та залишаються в спектрі вихідного сигналу.

Проміжок частот, для яких коефіцієнт передачі фільтра малий (для ідеального фільтра він дорівнює нулю), називається *смугою затримки* (СЗ, stopband). Якщо частина спектру сигналу потрапляє в смугу затримки, то ці складові зазнають значного ослаблення, і у вихідному сигналі фільтра вони присутні не будуть. В цьому випадку говорять, що ця частина спектру сигналу затримана фільтром.

В реальних фільтрах неможливо забезпечити різкий перехід між смугою пропускання та смугою затримки. Між цими двома смугами буде знаходитися частотний проміжок, на якому коефіцієнт передачі змінюється – перехідна смуга (ПС, transition band). АЧХ реальних фільтрів подано на рисунку:



АЧХ реальних фільтрів: а) ФНЧ, б) ФВЧ, в) СФ, г) ЗФ

Видно, що зміна коефіцієнта передачі для таких фільтрів відбувається не раптово. Смуга пропускання реальних фільтрів визначається по-іншому: це смуга, в якій фільтр має достатньо великий коефіцієнт передачі. Вважається, що це смуга частот, для яких коефіцієнт передачі зменшується не менше, ніж в $\sqrt{2}$ разів.

На основі цього визначається *частота зрізу* фільтра – це та частота, на якій коефіцієнт передачі зменшується в $\sqrt{2}$ разів відносно максимального коефіцієнта передачі в смузі пропускання. Для випадку, коли коефіцієнт передачі фільтра вимірюється в децибелах, то частота зрізу визначається на рівні -3 дБ від максимального значення.

6.2. Приклади розв'язання типових задач

6.2.1. Спроектувати цифровий фільтр нижніх частот з апроксимацією за Баттервортом з такими характеристиками:

- частота зрізу 20 Гц;

- частота затримки 30 Гц;

- коефіцієнт передачі на частоті зрізу -3 дБ;

- коефіцієнт передачі на частоті затримки -40 дБ;

- частота дискретизації сигналу, що піддається фільтрації 128 Гц.

Записати різницеве рівняння фільтра, характеристичну функцію та КЧХ фільтра. Побудувати графік АЧХ та ФЧХ фільтра.

Для побудови фільтра необхідно на основі заданих параметрів АЧХ визначити його порядок та частоту зрізу, а потім на основі цих даних розрахувати коефіцієнти характеристичної функції. Для розв'язання задачі скористаємось функціями Матлаб для проектування цифрових фільтрів.

Для визначення порядку та частоти зрізу скористаємось функцією buttord у синтаксисі:

[N, Wn] = buttord(Wp, Ws, Rp, Rs),

де Wp – нормована (до частоти Найквіста) частота границі смуги пропускання (частота зрізу фільтра);

Ws – нормована (до частоти Найквіста) частота границі смуги затримки (частота затримки фільтра);

Rp – коефіцієнт передачі на частоті зрізу (минімальний припустимий коефіцієнт передачі в смузі пропускання) у дБ;

Rs – коефіцієнт передачі на частоті затримки (максимальний припустимий коефіцієнт передачі в смузі затримки) у дБ;

N – мінімальний порядок фільтра;

Wn – нормована частота зрізу за рівнем -3 дБ.

Напишемо скрипт для синтезу фільтра та розрахунку АЧХ, ФЧХ та побудови графіків:

```
close all;
clear all;

Fs = 128; % Hz
Fpass = 20; % Hz
Fstop = 30; % Hz
Rp = 3; % dB
Rs = 40; % dB
Wp = Fpass/(Fs/2); Ws = Fstop/(Fs/2);
[n,Wn] = buttord(Wp,Ws,Rp,Rs);    % Gives mimimum order of filter
[b,a] = butter(n,Wn);             % Butterworth filter design

disp(b);
disp(a);

[h,f] = freqz(b,a,50,Fs);
```

```
figure;
subplot(2,1,1);
plot(f,abs(h),'linewidth',2); grid on;
xlabel('f, Hz','fontsize',12);
title('Frequency Response','fontsize',12);
ylabel('Magnitude','fontsize',12);
set(gcf,'color','white');
subplot(2,1,2);
plot(f,phase(h),'linewidth',2); grid on;
title('Phase Response ','fontsize',12);
xlabel('f, Hz','fontsize',12);
ylabel('Phase, radians','fontsize',12);
set(gcf,'color','white');
```

Отже, відповідно до заданих вимог до фільтра отримаємо фільтр 9 порядку. Коефіцієнти фільтра:

$$b=[0.0002,\quad 0.0018,\quad 0.0072,\quad 0.0167,\quad 0.0251,$$
$$0.0251,\quad 0.0167,\quad 0.0072,\quad 0.0018,\quad 0.0002],$$
$$a=[1.0000,\quad -3.2834,\quad 5.6875,\quad -6.2537,\quad 4.7339,$$
$$-2.5157,\quad 0.9312,\quad -0.2299,\quad 0.0342,\quad -0.0023].$$

Різницеве рівняння:

$$y[n]=0.0002x[n]+0.0018x[n-1]+0.0072x[n-2]+0.0167x[n-3]+0.0251x[n-4]+$$
$$+0.0251x[n-5]+0.0167x[n-6]+0.0072x[n-7]+0.0018x[n-8]+0.0002x[n-9]+$$
$$+3.2834y[n-1]-5.6875y[n-2]+6.2537y[n-3]-4.7339y[n-4]+2.5157y[n-5]-$$
$$-0.9312y[n-6]+0.2299y[n-7]-0.0342y[n-8]+0.0023y[n-9]$$

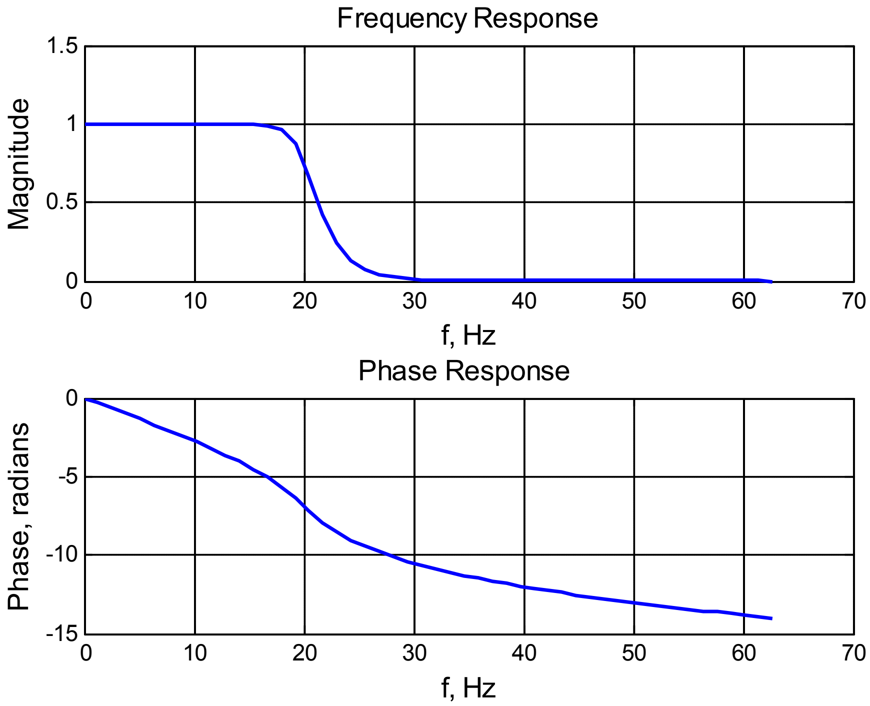
Характеристична функція фільтра:

$$H(z)=\frac{0.0002+0.0018z^{-1}+0.0072z^{-2}+0.0167z^{-3}+0.0251z^{-4}+}{1-3.2834z^{-1}+5.6875z^{-2}-6.2537z^{-3}+4.7339z^{-4}-}$$
$$\frac{+0.0251z^{-5}+0.0167z^{-6}+0.0072z^{-7}+0.0018z^{-8}+0.0002z^{-9}}{-2.5157z^{-5}+0.9312z^{-6}-0.2299z^{-7}+0.0342z^{-8}-0.0023z^{-9}}$$

Запишемо вираз для КЧХ фільтра, підставляючи у вираз характеристичної функції замість $z^{-1}\rightarrow e^{-\frac{j2\pi f}{F_s}}$, де F_s – частота дискретизації:

$$H(j\omega)=\frac{0.0002+0.0018e^{-\frac{j2\pi f}{F_s}}+0.0072e^{-\frac{2j2\pi f}{F_s}}+0.0167e^{-\frac{3j2\pi f}{F_s}}+0.0251e^{-\frac{4j2\pi f}{F_s}}+}{1-3.2834e^{-\frac{j2\pi f}{F_s}}+5.6875e^{-\frac{2j2\pi f}{F_s}}-6.2537e^{-\frac{3j2\pi f}{F_s}}+4.7339e^{-\frac{4j2\pi f}{F_s}}-}$$
$$\frac{+0.0251e^{-\frac{5j2\pi f}{F_s}}+0.0167e^{-\frac{6j2\pi f}{F_s}}+0.0072e^{-\frac{7j2\pi f}{F_s}}+0.0018e^{-\frac{8j2\pi f}{F_s}}+0.0002e^{-\frac{9j2\pi f}{F_s}}}{-2.5157e^{-\frac{5j2\pi f}{F_s}}+0.9312e^{-\frac{6j2\pi f}{F_s}}-0.2299e^{-\frac{7j2\pi f}{F_s}}+0.0342e^{-\frac{8j2\pi f}{F_s}}-0.0023e^{-\frac{9j2\pi f}{F_s}}}$$

Графіки АЧХ та ФЧХ синтезованого фільтру наведено на рисунку:



6.2.2. Спроектувати цифровий загороджувальний фільтр з апроксимацією за Чебишовим I-го роду з такими характеристиками:

- частоти зрізу 100 кГц та 200 кГц;

- частоти затримки 110 кГц та 190 кГц;

- коефіцієнт передачі на частоті зрізу -3 дБ;

- коефіцієнт передачі на частоті затримки -100 дБ;

- максимальні допустимі пульсації в смузі затримки 5 дБ;

- частота дискретизації сигналу, що піддається фільтрації 1 МГц.

Записати різницеве рівняння фільтра, характеристичну функцію та КЧХ фільтра. Побудувати графік АЧХ та ФЧХ фільтра.

Для побудови фільтра необхідно на основі заданих параметрів АЧХ визначити його порядок та частоту зрізу, а потім на основі цих даних розрахувати коефіцієнти характеристичної функції. Для розв'язання задачі скористаємось функціями Матлаб для проектування цифрових фільтрів.

Для визначення порядку та частоти зрізу скористаємось функцією cheb1ord у синтаксисі:

[N, Wn] = cheb1ord (Wp, Ws, Rp, Rs),

де Wp – нормована (до частоти Найквіста) частота границі смуги пропускання (частота зрізу фільтра);

Ws – нормована (до частоти Найквіста) частота границі смуги затримки (частота затримки фільтра);

Rp – коефіцієнт передачі на частоті зрізу (мінімальний припустимий коефіцієнт передачі в смузі пропускання) у дБ;

Rs – коефіцієнт передачі на частоті затримки (максимальний припустимий коефіцієнт передачі в смузі затримки) у дБ;

N – мінімальний порядок фільтра,

Wn – нормована частота зрізу за рівнем -3 дБ.

Напишемо скрипт для синтезу фільтра та розрахунку АЧХ, ФЧХ та побудови графіків:

```
close all;
clear all;

Fs = 1e6; % Hz
Fpass = [100e3 200e3]; % Hz
Fstop = [110e3 190e3]; % Hz
Rp = 3; % dB
Rs = 100; % dB
R = 5; % dB
Wp = Fpass/(Fs/2); Ws = Fstop/(Fs/2);
[n,Wn] = cheb1ord(Wp,Ws,Rp,Rs);   % Gives mimimum order of filter
[b,a] = cheby1(n,R,Wn,'stop');          % Butterworth filter design

disp(b);
disp(a);

[h,f] = freqz(b,a,200,Fs);

figure;
subplot(2,1,1);
plot(f,abs(h),'linewidth',2); grid on;
xlabel('f, Hz','fontsize',12);
title('Frequency Response','fontsize',12);
ylabel('Magnitude','fontsize',12);
set(gcf,'color','white');
subplot(2,1,2);
plot(f,phase(h),'linewidth',2); grid on;
title('Phase Response','fontsize',12);
xlabel('f, Hz','fontsize',12);
ylabel('Phase, radians','fontsize',12);
set(gcf,'color','white');
```

Отже, отримаємо фільтр 37-го порядку. Коефіцієнти фільтра:

b = [4.9733e-06, 6.83868e-05, 0.000533583, 0.00297183, 0.013049, 0.047526,
0.148259, 0.404632, 0.980999, 2.1365, 4.21572, 7.58633, 12.5147, 19.0016,
26.6381, 34.5624, 41.578, 46.4315, 48.1684, 46.4315, 41.578, 34.5624, 26.6381,
19.0016, 12.5147, 7.58633, 4.21572, 2.1365, 0.980999, 0.404632, 0.148259,
0.047526, 0.013049, 0.00297183, 0.000533583, 6.83868e-05, 4.9733e-06] ,

a = [1, 5.81535, 13.9158, 19.6521, 27.9208, 48.8432, 62.259, 51.7557,
58.5596, 86.2512, 62.4506, 19.7817, 51.6019, 68.6681, -4.90041,
-16.0087, 54.3275, 22.3463, -47.0426, 7.62548, 49.0448, -16.6519,
-25.5238, 35.2505, 25.1997, -11.306, 13.0902, 34.4186, 15.6939,
9.22277, 20.1391, 17.6483, 8.22211, 5.95395, 5.41485, 2.57159, 0.465768] .

Різницеве рівняння може бути записане з використанням наведених вище коефіцієнтів:

$$y[n]=\sum_{k=0}^{36} b[k]\cdot x[n-k]-\sum_{m=1}^{36} a[m]\cdot y[n-m]$$

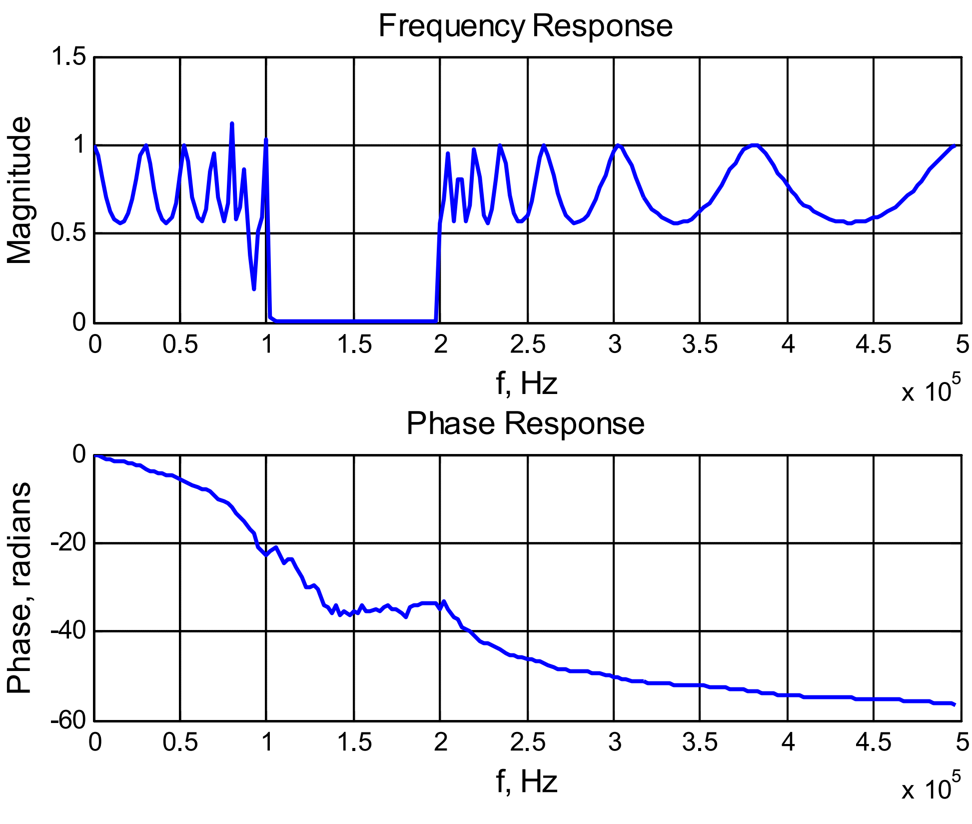
Характеристична функція фільтра:

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{36} b[k]\cdot z^{-k}}{\sum_{m=0}^{36} a[m]\cdot z^{-m}}$$

Запишемо вираз для КЧХ фільтра підставляючи у вираз характеристичної функції замість $z^{-1}\to e^{-\frac{j2\pi f}{F_s}}$, де F_s – частота дискретизації:

$$H(j\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{36} b[k]\cdot e^{-\frac{jk2\pi f}{F_s}}}{\sum_{m=0}^{36} a[m]\cdot e^{-\frac{jm2\pi f}{F_s}}}$$

Графік АЧХ та ФЧХ синтезованого фільтру наведено на рисунку:



6.3. Задачі для самостійного опрацювання

6.3.1. Спроектувати цифровий смуговий фільтр з апроксимацією за Чебишовим II-го роду з такими характеристиками:

- частоти зрізу 10 кГц та 20 кГц;

- частоти затримки 5 кГц та 30 кГц;

- коефіцієнт передачі на частоті зрізу -3 дБ;

- коефіцієнт передачі на частоті затримки -40 дБ;

- максимальні допустимі пульсації в смузі затримки 2 дБ;

- частота дискретизації сигналу, що піддається фільтрації 50 кГц.

Записати різницеве рівняння фільтра, характеристичну функцію та КЧХ фільтра. Побудувати графік АЧХ та ФЧХ фільтра.

6.3.2. Спроектувати цифровий фільтр верхніх частот з апроксимацією за Баттервортом з такими характеристиками:

- частота зрізу 0.5 Гц;

- частота затримки 0.1 Гц;

- коефіцієнт передачі на частоті зрізу -3 дБ;

- коефіцієнт передачі на частоті затримки -45 дБ;

- частота дискретизації сигналу, що піддається фільтрації 200 Гц.

Записати різницеве рівняння фільтра, характеристичну функцію та КЧХ фільтра. Побудувати графік АЧХ та ФЧХ фільтра.

Рекомендована література

1. Френкс Л. Теория сигналов. – М.: Сов. радио, 1974. – 344 с.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2006. – 856 с.
3. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 992 с.
4. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. - 548 с.
5. Робинсон Э.А. История развития теории спектрального оценивания. / ТИИЭР. – 1982. – т.70, № 9. – С. 6 – 32.
6. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: ООО «Бином-пресс», 2006. – 656 с.
7. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: Учебник для вузов. 2-е изд. - СПб.: Питер, 2007. - 751 с.
8. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
9. Ахмет Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер. с англ./ Под ред. И.Б. Фоменко. – М.: Радио и связь, 1980. – 248 с.
10. Попов, А.О. Теорія сигналів: навчальний посібник з розділів «Сигнали та системи їх перетворення» та «Аналіз сигналів» для студентів напряму 6.050801 – мікро- та наноелектроніка / А.О. Попов, В.О. Фесечко. – К. : НТУУ «КПІ», 2012. – 161 с.
11. Попов, А. О. Теорія сигналів: навчальний посібник з розділу «Спеціальні розділи теорії сигналів» для студентів напряму 6.050801 – мікро- та наноелектроніка / А.О. Попов, В.О. Фесечко. – К. : НТУУ «КПІ», 2014. – 58 с.