ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

ОДНОМЕРНЫЕ ФОТОННЫЕ КРИСТАЛЛЫ

Одномерные фотонные кристаллы – это диэлектрические структуры, оптические свойства которых периодически изменяются в одном направлении, которое называется *осью периодичности*, и неизменны в ортогональных к нему направлениях. Такие структуры обладают уникальными оптическими свойствами, особенно явно проявляющимися, когда период решетки и длина волны имеют один порядок.

Пусть ось периодичности совпадает с осью $0z$ декартовой системы координат. Тогда оптические свойства, такие как диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(z)$ и диэлектрическая восприимчивость $\eta(z)=\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon(z)}$ являются периодическими функциями z, удовлетворяющими условиям:

$$\varepsilon(z+\Lambda)=\varepsilon(z),\eta(z+\Lambda)=\eta(z) \quad (1.1)$$

справедливых для любого z; Величина Λ называется периодом фотонного кристалла.

Особенности распространение волны в такой периодической среде можно определить, исследовав общие свойства решений обобщенного уравнение Гельмгольца:

$$\nabla\times\left[\eta(\mathbf{r})\times\nabla\mathbf{H}(\mathbf{r})\right]=\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

для случая, когда функция $\eta(\mathbf{r})$ – периодична.

Рассмотрим нормальное падение плоской электромагнитной волны на фотонный кристалл. Ось $0z$ выберем совпадающей с направлением распространения; другие оси выберем так, чтобы вектор **E** колебался лишь в направлении $0x$, а вектор **H** – в направлении $0y$. В таком случае ненулевая компонента **H** есть $\mathbf{H}_y$, так что (1.2) приобретет вид:

$$-\frac{d}{dz}\left[\eta(z)\frac{d}{dz}\right]H_y(z)=\frac{\omega^2}{c^2}H_y(z). \qquad (1.3)$$

Уравнение (1.3) записано в виде задачи на собственные значения $\frac{\omega^2}{c^2}$ оператора $-\frac{d}{dz}\left[\eta(z)\frac{d}{dz}\right]$. Собственными функциями здесь выступают функции $H_y(z)$.

Трансляционная симметрия накладывает на *моды* или *режимы распространения*, то есть на вид функции $H_y(z)$, специфические условия. Они рассмотрены ниже.

А. Моды Блоха (волны Блоха)

А.1. Плоская волна как прообраз функции Блоха

Рассмотрим *однородную среду*, которая по определению инвариантна относительно произвольной трансляции системы координат. Режим распространения в среде должен удовлетворять условию неизменности вида волны при произвольной трансляции; волна может отличаться лишь на унимодальный множитель (фазовый множитель). Плоская волна $\exp(-ikz)$, которая, как известно, является решением уравнения Гельмгольца для однородной среды, такому условию, естественно, удовлетворяет. Действительно:

$$e^{-ik(z+d)}=e^{-ikd}\times e^{-ikz},$$

то есть трансляция на *произвольное* расстояние d приводит лишь к умножению исходной функции на унимодальный множитель (фазовый множитель) e^{-ikd}. Считая, что оператор трансляции на расстояние d есть оператор, переводящий функцию $y(x)$ в функции $y(x+d)$, нетрудно заметить, что фазовый множитель e^{-ikd} является *собственное значением оператора трансляции.*

А.2. Моды Блоха (нормальное падение)

Рассмотрим периодическую в одном направлении среду, которая инвариантна по отношению к трансляции на расстояние Λ вдоль оси периодичности. Ее оптические моды – это волны, которые сохраняют свою форму под действием *оператора трансляции на расстояние* Λ, изменяясь лишь на фазовый множитель.

По теореме Блоха такие волны должны иметь вид:

$$U(z) = p_K(z)e^{-iKz}, \tag{1.4}$$

где под U подразумевается любая из компонент E_x, E_y, H_x или H_y; K – постоянная, $p_K(z)$ – периодичная по z функция с периодом Λ:

$$p_K(z+\Lambda) = p_K(z) \text{ для } \forall z \text{ и } \forall K. \tag{1.5}$$

Вид функции $U(z)$, определяющийся (1.4) и (1.5), удовлетворяет условию воспроизведения самой себя, умноженной на унимодальный множитель, при трансляции на расстояние Λ:

$$U(z+\Lambda) = p_K(z+\Lambda)e^{-iK(z+\Lambda)} = e^{-iK\Lambda}U(z) \tag{1.6}$$

Оптическая волна, описываемая (1.6), называется *волной Блоха* (или *модой Блоха*), а параметр K, который определяет моду и связанную с ней периодическую функцию $p_K(z)$ называется *волновым числом Блоха*.

Таким образом, мода Блоха – это плоская волна $\exp(-iKz)$ с постоянной распространения K, модулированная периодической функцией $p_K(z)$, имеющей вид стоячей волны[1]. Вид действительной части волны Блоха показан на рис. 1, *а*.

Функция $p_K(z)$ есть периодическая функция с периодом Λ, поэтому ее можно разложить в *комплексный* ряд Фурье как суперпозицию гармоник, имеющих вид e^{-imgz}, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$p_K(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{-imgz}, \tag{1.7}$$

[1] в том смысле, что точки с одинаковой амплитудой колебаний сохраняют свое положение в пространстве

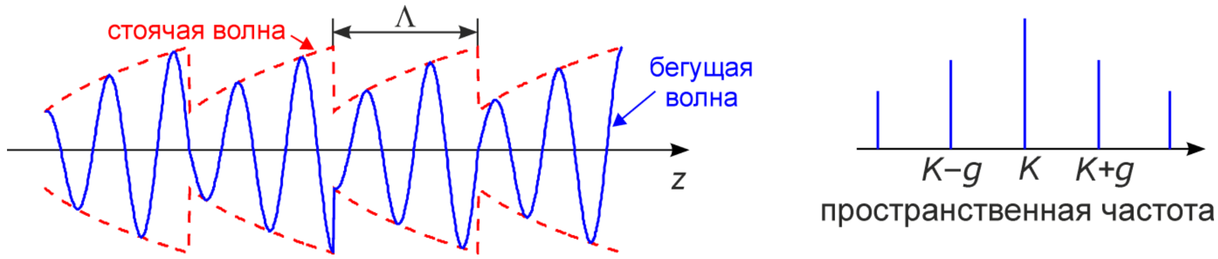
где g – *основная пространственная частота периодической структуры*:

$$g = \frac{2\pi}{\Lambda}. \tag{1.8}$$

Представив функцию $p_K(z)$ в виде ряда (1.7), всю функцию Блоха можно теперь представить в виде суперпозиции плоских волн:

$$\exp\{-\mathrm{i}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{частота}\\ \text{огибающей}}}{K}z\}\exp\{-\mathrm{i}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{частота}\\ m\text{-йгармоники}}}{mg}z\} = \exp\{-\mathrm{i}(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{спектр частот}\\ \text{волны Блоха}}}{K+mg})z\},$$

которые, как видно, имеют пространственные частоты: $K, K \pm g, K \pm 2g, \ldots$. Таким образом, основная пространственная частота периодической структуры g, а также высшие частоты $g \pm mg$ образуют пространственночастотный спектр волны Блоха (рис. 1, *б*). Сдвиг пространственной частоты, обусловленный периодичностью среды, аналогичен сдвигу временной частоты волны при отражении от движущихся объектов (эффект Доплера).



а) *б*)

Рис. 1. Волна Блоха (*а*) и ее пространственночастотный спектр (*б*).

Мода Блоха имеет еще одно примечательное свойство. Именно: две моды с волновыми числами, отличающимися на g, например K и $K' = K + g$ – эквивалентны, в том смысле, что им соответствуют одни и те же собственные частоты. Это следует из того, что собственные функции, которые соответствуют K', есть функции Блоха, которые характеризуются той же огибающей, что и функции, соответствующие K:

$$U_{K'} = p_{K+g}\,\mathrm{e}^{-i(K+g)z} = \underbrace{p_{K+g}\,\mathrm{e}^{-igz}}_{\equiv p'_K}\,\mathrm{e}^{-iKz}\,. \qquad (1.9)$$

Для более строгого доказательства можно показать, что собственные функции оператора трансляции U_K и $U_{K'}$ на Λ одинаковы и равны e^{-iKz}. Поскольку оператор $-\dfrac{d}{dz}\left[\eta(z)\dfrac{d}{dz}\right]$ уравнения (1.3) и оператор трансляции на Λ коммутируют, то они должны имеют общие собственные функции. Поэтому если для оператора трансляции K и $K' = K + g$ они эквивалентны, то же самое можно сказать о частотах.

Таким образом, для полного описания всех мод, достаточно рассматривать значения K, которые попали в любой из пространственночастотных интервалов шириной $g = \dfrac{2\pi}{\Lambda}$. Один из таких интервалов, а именно $K \in \left[-\dfrac{g}{2};\dfrac{g}{2}\right] = \left[-\dfrac{\pi}{\Lambda};\dfrac{\pi}{\Lambda}\right]$ называется зоной Бриллюэна и дает *исчерпывающую* информацию о зависимости $\omega(K)$.

Задача на собственные значения, закон дисперсии и фотонные запрещенные зоны

Выше был установлен общий вид мод, которые могут существовать в периодической среде. Воспользуемся знанием математического вида волн для решения уравнения Гельмгольца. Блоховскому волновому числу K соответствует дискретный ряд собственных значений уравнения (1.3) $\dfrac{\omega^2}{c^2}$, и такой же ряд частот ω. Эти значения используются для воссоздания закона дисперсии, то есть соотношения $\omega(K)$. Зная собственные функции (1.3), можно определить периодические функции $p_K(z)$ для каждого значения частоты ω, соответствующей данному блоховскому числу K.

Закон дисперсии представляет собой периодическую многозначную функцию от K с периодом g (g-основная пространственная частота периодической структуры).

Обычно он строится в рамках зоны Бриллюэна $K \in \left[-\frac{g}{2}; \frac{g}{2}\right]$ (рис. 2, *а*). Иногда полезно построить закон дисперсии на всей оси K, как показано на рис. 2, *а* жирной линией. Будучи визуализирована таким образом, зависимость $\omega(K)$ является монотонно возрастающей функцией, претерпевающей разрывы в точках, где K кратно $g/2$. Эти разрывы соответствуют *фотонным запрещенным зонам* или *фотонным щелям*. Фотонные запрещенные зоны – это участки, которые не пересекаются дисперсионными кривыми, то есть нет таких K, для которых волна может распространяться на частотах, заключенных в фотонной щели. Физически это означает невозможность распространения в областях спектра, соответствующих фотонной запрещенной зоны.

Происхождение разрывов на законе дисперсии объясняется особой симметрией, которая имеет место, когда $K = g/2$, то есть когда период бегущей волны в точности равен половине периода периодической среды.

Рассмотрим две моды с $K = g/2$ и периодической частью блоховских функций $p_K = \pm p_{g/2}$.Поскольку эти моды распространяются с одним волновым числом, но в противоположных направлениях, они как бы «видят» инвертированную версию среды; отсюда:

$$p_{-g/2}(z) = p_{g/2}(-z).$$

Но эти две моды на самом деле – одна и та же мода, поскольку их волновые числа отличаются на g. Из этого следует, что на краю зоны Бриллюэна существуют две волны Блоха, являющиеся инвертированными версиями друг друга. Поскольку в пределах элементарной ячейки среда неоднородна (или кусочно однородна), эти две функции выражают физически отличные режимы распространения, поэтому соответствуют различным собственным частотам ω. Разрывы функции $\omega(K)$ при $K = ng/2$ объясняются аналогичным образом. Более строго происхождение разрывов в точках, кратных $g/2$, объясняется с привлечением вариационного исчисления. В рамках последнего можно показать, что, для фотонного кристалла, состоящего из чередующихся слоев двух материалов с разными коэффициентами преломления, $n_2 > n_1$, в точках разрывов меньшей частоте будет соответствовать концентрация поля в слоях с n_2, большей частоте – в слоях с n_1. (рис. 2, *б*)

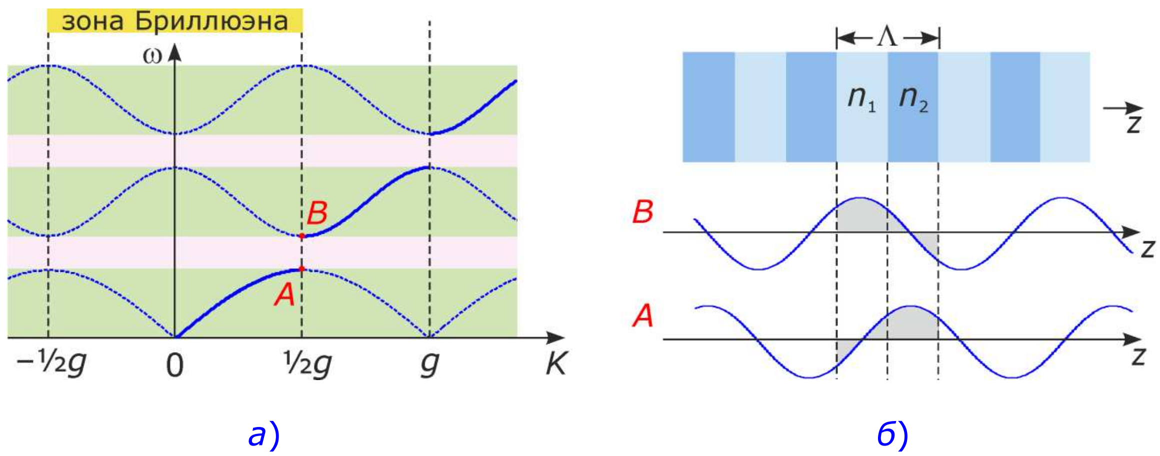


Рис. 2. (*а*) Закон дисперсии – это многозначная периодическая функция с периодом $g = 2\pi/\Lambda$ и разрывами в точках, где K кратно $g/2$. (*б*) Блоховские функции в точках *A* и *B* на краю зоны Бриллюэна для диэлектрической среды с чередующимися слоями различных материалов ($n_2 > n_1$).

Для решения уравнения Гельмгольца в виде задачи на собственные задачи и собственные функции применяют 2 подхода:

1. **Фурье-оптика**. Подход основан на разложении периодической функции $\eta(z)$ среды и моды Блоха $p_K(z)$ в ряд Фурье, и преобразованию дифференциального уравнения Гельмгольца в систему алгебраических уравнений, записанной в виде матричной задачи на собственные значения, которую решают численно.
2. **Матричная оптика**. Подход применим для слоистых (то есть кусочно-однородных) сред с плоскими границами.

Вместо решения уравнения Гельмгольца, в этом случае напрямую используют законы распространения и отражения/преломления на границах, являющихся известными следствиями уравнений Максвелла. Затем используются матричные методы. «Матричный» подход приводит к матричной задаче на собственные значения (размер матрицы 2x2). Решая эту задачу, получают дисперсионные кривые и моды Блоха.

B. Матричная оптика периодической среды

Периодичная в одном направлении среда состоит из одинаковых сегментов, т.н. *элементарных ячеек*, которые повторяются в одном из направлений (ось z) с периодом Λ (рис.3)

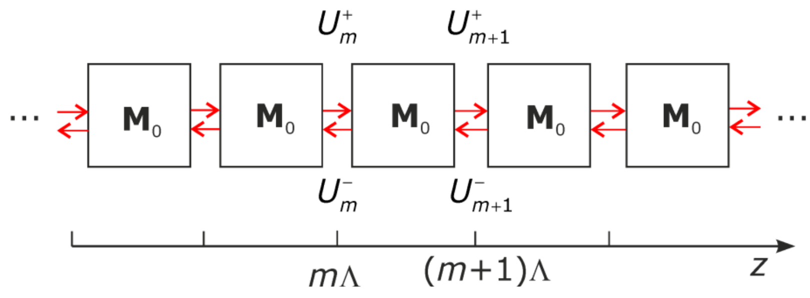


Рис. 3. Представление периодической среды при помощи матриц передачи.

Элементарная ячейка состоит из последовательности диэлектрических слоев или частично отражающих зеркал, следующих друг за другом в определенном порядке. Считая, что потери в элементарной ячейке отсутствуют, можно записать ее матрицу передачи в виде:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 1/t^* & r/t \\ r^*/t^* & 1/t \end{bmatrix}, \tag{1.10}$$

где t и r – комплексные амплитуды коэффициентов прохождения/отражения, удовлетворяющие условию $T = |t|^2$, $R = |r|^2$ – соответственные коэффициенты, взятые по мощности.

Такую среду можно рассматривать как решетку Брэгга с количеством сегментов $N \to \infty$.

Применим матричный подход, чтобы определить моды Блоха. Если известны амплитуды $U_m^{\pm}$ (это амплитуда в точке $z = m\Lambda$; где m – номер ячейки), амплитуды в любой точке элементарной ячейки можно определить, используя соответственные матричные методы. Поэтому сфокусируемся на изменении амплитуд $U_m^{\pm}$ от одной элементарной ячейки к другой. Это изменение описывается матричным уравнением:

$$\begin{bmatrix} U_{m+1}^{+} \\ U_{m+1}^{-} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_0 \begin{bmatrix} U_{m+1}^{+} \\ U_{m+1}^{-} \end{bmatrix}, \tag{1.11}$$

которое можно применить для определения амплитуд в данной ячейке, если амплитуды в предыдущей ячейке известны.

Задача на собственные значения и моды Блоха

По определению, моды периодической среды воспроизводят сами себя через период Λ (в этом случае – через элементарную ячейку), то есть для них выполняется условие:

$$\begin{bmatrix} U_{m+1}^{+} \\ U_{m+1}^{-} \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi} \begin{bmatrix} U_{m}^{+} \\ U_{m}^{-} \end{bmatrix}, \tag{1.12}$$

где

$$\Phi = K\Lambda\,. \tag{1.13}$$

Таким образом, через период абсолютные величины падающих и отраженных волн повторяются, а фазы изменяются величину Φ, которая называется *фазой Блоха*.

Поиск комплексных амплитуд $U_m^{\pm}$ и фазы $\Phi = K\Lambda$, удовлетворяющих условию (1.12) можно представить в виде *матричной* задачи на собственные значения. Для этого в (1.11) и (1.12) положим $m = 0$ и приравняем их правые части:

$$\mathbf{M}_0 \begin{bmatrix} U_0^+ \\ U_0^+ \end{bmatrix} = e^{i\Phi} \begin{bmatrix} U_0^+ \\ U_0^+ \end{bmatrix} \qquad (1.14)$$

Уравнение (10) – это задача на собственные значения для матрицы элементарной ячейки $\mathbf{M}_0$, имеющей размер 2x2. Коэффициент $e^{i\Phi}$ играет роль собственного значения, а вектор $\left[U_0^+; U_0^-\right]^T$ – собственный вектор.

Уравнение (1.14) превращается в тождество, если определитель матрицы $\mathbf{M}_0 - e^{i\Phi}\mathbf{I}$ равен нулю:

$$\det\left(\mathbf{M}_0 - e^{i\Phi}\mathbf{I}\right) = 0. \qquad (1.15)$$

Представляя матрицу $\mathbf{M}_0$ в виде (1.10) в (1.15) получим квадратное уравнение относительно $e^{i\Phi}$, корни которого:

$$e^{i\Phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t*} + \frac{1}{t}\right) \pm i\left\{1 - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t*} + \frac{1}{t}\right)\right]^2\right\}^{1/2}, \qquad (1.16),$$

откуда

$$\cos\Phi = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{t}\right\}. \qquad (1.17)$$

Уравнение (1.17) совпадает с уравнением (1.6) для решетки Брэгга. Этого следовало ожидать, поскольку периодическая среда и есть решетка Брегга с бесконечным числом сегментов.

Поскольку матрица $\mathbf{M}_0$ имеет размерность 2x2, имеем 2 собственных значения. Поэтому из множества решений (1.17) только 2 являются независимыми. Внутри интервала $[-\pi, \pi]$ есть два решения, отличающиеся лишь знаками. Они соответствуют блоховским модам, распространяющимся в прямом и обратном направлении. Другие решения, получающиеся добавлением чисел, кратных 2π, не являются независимыми, поскольку функция $e^{-i\Phi}$ имеет период $2\pi i$.

Собственные векторы $\mathbf{M}_0$:

$$\begin{bmatrix} U_0^+ \\ U_0^- \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r/t \\ e^{-i\Phi} - 1/t^* \end{bmatrix} \qquad (1.18)$$

в чем можно убедиться, подействовав на правую часть (1.18) матрицей $\mathbf{M}_0$; результатом будет вновь правая часть (1.18), умноженная на некоторою постоянную.

Периодическую часть функции Блоха $p_K(z)$ можно найти, отслеживая изменения U_0^+ и U_0^- в рамках элементарной ячейки. Например, если первый слой ячейки – однородная среда шириной d_1, имеющая коэффициент преломления n_1, то функция Блоха на расстоянии z от начала слоя равна:

$$p_K(z)e^{-iKz} = U_0^+ e^{-in_1k_0z} + U_0^- e^{in_1k_0z}, \; 0 < z < d_1. \qquad (1.19)$$

Из (1.19) с учетом (1.13) и (1.18) можно получить:

$$p_K(z) \sim \left[-r\mathrm{e}^{-in_1k_0z} + \left(\mathrm{e}^{-iK\Lambda} - 1\right)\mathrm{e}^{in_1k_0z}\right]e^{iKz}, \; 0 < z < d_1. \qquad (1.20)$$

Вид функции $p_K(z)$ в последующих сегментах можно найти аналогично, пользуясь матричными методами.

Закон дисперсии и зонная структура фотонного кристалла

Закон дисперсии – это соотношение, связывающее блоховское волновое число K и круговую частоту ω. Уравнение (1.17), которое позволяет найти собственные значения $\exp(-i\Phi)$ матрицы элементарной ячейки – это основа для получения закона дисперсии для периодичной в одном направлении среды. Фаза $\Phi = K\Lambda$ пропорциональна K и $t = t(\omega)$ связаны с частотой ω через задержку фазы, связанную с распространением через единичную ячейку, *поэтому (11) записанное в форме*

$$\cos\left(2\pi\frac{K}{g}\right) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{t(\omega)}\right\} \qquad (1.21)$$

представляет собой закон дисперсии $\omega(K)$. Здесь $g = 2\pi/\Lambda$ – основная пространственная частота периодической среды.

Функция $\cos(2\pi K/g)$ есть периодическая функция от K, период которой равен $g = 2\pi/\Lambda$. Поэтому для данной частоты ω уравнение (1.21) имеет множественные решения. Однако решения в точках K $K' = K + g$ не являются независимыми, поскольку им соответствуют одни и те же волны Блоха. Поэтому естественно ограничить область отображения зависимости $\omega(K)$ интервалом шириной g. Среди множества интервалов шириной g на оси K обычно выбирается интервал $\left[-\frac{g}{2};\frac{g}{2}\right]$ (или, что то же самое, $\left[-\frac{\pi}{\Lambda};\frac{\pi}{\Lambda}\right]$), который называется **зона Бриллюэна**. Это в точности соответствует ограничению фазы Φ интервалом $\left[-\pi;\pi\right]$. Также, поскольку $\cos(2\pi K / g)$ – четная функция K, каждому значению ω в зоне Бриллюэна соответствует два независимых значения K, отличающиеся только знаком. Они соответствуют модам Блоха, которые распространяются в прямом и обратном направлениях.

На законе дисперсии можно выделить интервалы частот, каждый из которых соответствуют одному из двух режимов:

1. **Режим нормального распространения**. Интервалы частот или *спектральные зоны*, в которых K действительно, соответствуют режиму *нормального распространения*. Этот режим определяется условием $\left|\mathrm{Re}\{1 / t(\omega)\}\right| \le 1$. Зоны, соответствующие нормальному режиму распространения, нумеруются числами 1, 2, 3,… по мере возрастания частоты.

2. **Режим фотонной запрещенной зоны**. Спектральные зоны, в которых K – комплексно, соответствуют нераспространяющимся модам, которые быстро затухают в глубине фотонного кристалла. Они определяются условием $\left|\mathrm{Re}\{1 / t(\omega)\}\right| > 1$ и соответствуют *полосам отражения* дифракционных решеток Брэгга. Они также называются *фотонными запрещенными зонами*, поскольку распространяющиеся моды на этих интервалах отсутствуют.

Для построения закона дисперсии $\omega(K)$ аргумент K часто берут в единицах брэгговской частоты $g = 2\pi/\Lambda$, поскольку g – основная пространственная частота периодической структуры. Частота ω обычно берется в единицах брэгговской частоты $\omega_B = \pi c/\Lambda$, где $c = c_0/\bar{n}$. Здесь $\bar{n}$ – усредненный показатель преломления периодической среды. Отношение $\omega_B/(g/2) = c$, где c – тангенс угла наклона функции дисперсионной кривой в однородной среде, имеющей показателем преломления $\bar{n}$: $c = c_0/\bar{n}$.

Пример. *Набор периодически повторяющихся частично отражающих зеркал*.

Рассмотрим фотонный кристалл, состоящий из периодически расположенных частично отражающих зеркал, разнесенных друг от друга на расстояние Λ, погруженных в среду с коэффициентом преломления n.

Спектральная зависимость коэффициента прохождения элементарной ячейки уже была определена в примере для решетки Брэгга, и оказалось, что:

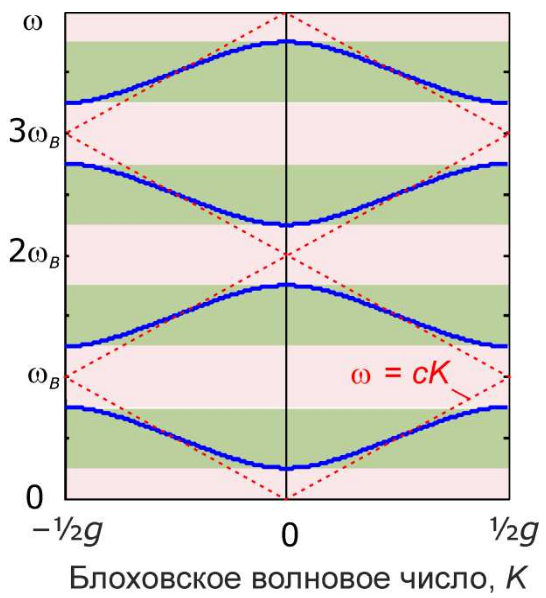
$$t = |t| e^{i\varphi}, \text{ где } \varphi = nk_0\Lambda = \frac{\omega}{c}\Lambda. \qquad (1.22)$$

Подставляя (1.22) в (1.21), получим:

$$\cos\left(2\pi\frac{K}{g}\right) = \frac{1}{|t|}\cos\left(\pi\frac{\omega}{\omega_B}\right), \qquad (1.23)$$

где $g = 2\pi/\Lambda$, $\omega_B = \pi c/\Lambda$ – брэгговская частота.

Зависимость, описываемая (1.23), показана на рис. 4.



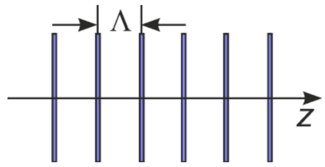


Рис. 4. Закон дисперсии периодического набора частично отражающих зеркал ($|t|^2 = 0.5$), разнесенных в пространстве на расстояние Λ. Здесь $\omega_B = \pi c / \Lambda$, $g = 2\pi / \Lambda$. Пунктирные прямые линии соответствуют закону дисперсии в однородном пространстве, в котором $c \equiv \omega / K = \omega_B / (g / 2)$.