

МАТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ РЕШЕТОК БРЭГГА

Введение

Оказывается, что эффекты отражений и множественных переотражений от границ слоев многослойной структуры могут привести к усилению результирующей отраженной волны. Можно создать условия, при которых полное отражение может наблюдаться не только на ряде отдельных частот (рис. 1, а), а на целых полосах частот (рис. 1, б).

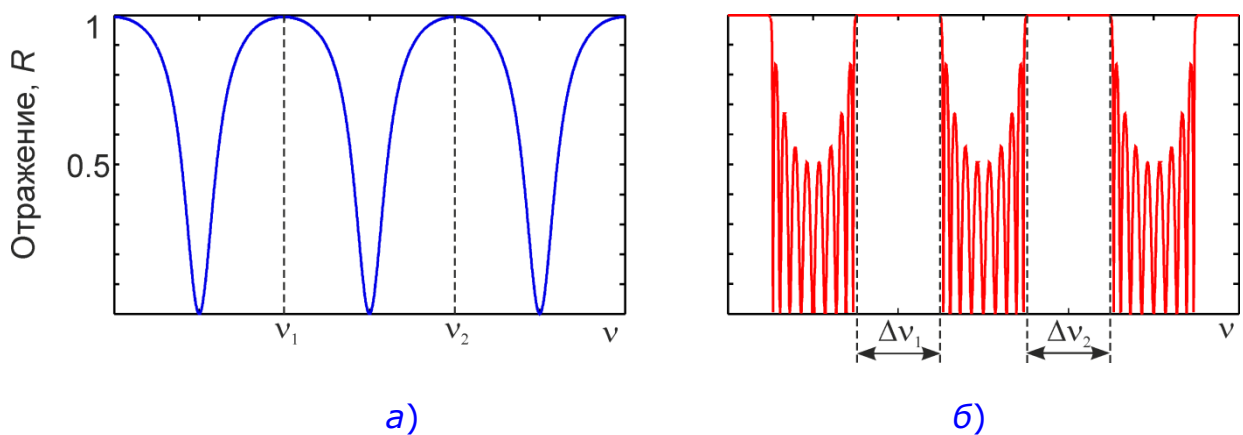


Рис. 1. Спектральная зависимость коэффициента отражения: а) полное отражение происходит на ряде дискретных частот; в случае б) полное отражение происходит на полосах частот.

Объект исследования

Решетка Брэгга представляет собой повторяющиеся одинаковые сегменты, плоские и прилегающие друг к другу (рис. 2, а). Каждый сегмент может включать слои диэлектрика или частично отражающие зеркала. Все сегменты считаются одинаковыми по размеру и другим физическим свойствам; предполагается, что потери отсутствуют.

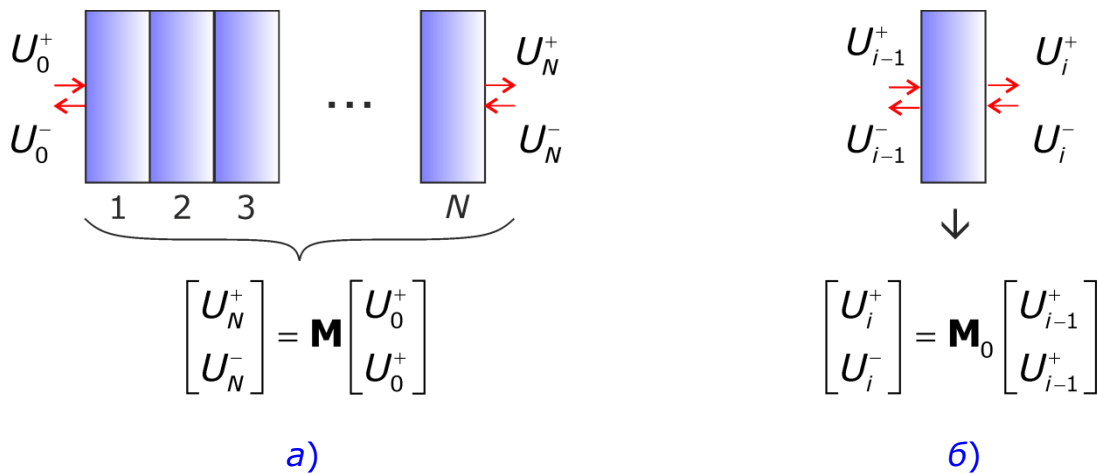


Рис. 2. Следующие друг за другом N одинаковых сегментов образуют решетку Брэгга, характеризующейся матрицей передачи \mathbf{M} (а); при этом каждый сегмент характеризуется одной и той же матрицей передачи \mathbf{M}_0 (б).

Подход к нахождению коэффициентов прохождения/отражения

Для нахождения коэффициентов отражения и прохождения воспользуемся матричными методами. Каждый сегмент является обратимой системой без потерь, поэтому матрица передачи единичного сегмента может быть записана в виде:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/t^* & r/t \\ r^*/t^* & 1/t \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где t – комплексный коэффициент прохождения, r – комплексный коэффициент отражения единичного сегмента.

Коэффициент отражения и прохождения единичного сегмента по мощности R и T равны:

$$T = |t|^2, \quad R = |r|^2. \quad (1.2)$$

В силу свойства мультипликативности \mathbf{M} -матриц матрица передачи решетки Брэгга, состоящей из N сегментов равна:

$$\mathbf{M} = \prod_{i=1}^N \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0^N. \quad (1.3)$$

Очевидно, что при достаточно большом N выражения для элементов матрицы \mathbf{M} становятся слишком громоздкими. К счастью, матрицы передачи сегмента \mathbf{M}_0 и системы, состоящей из N сегментов, \mathbf{M} , связаны соотношением:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^N = \Psi_N \mathbf{M}_0 - \Psi_{N-1} \mathbf{I}, \quad (1.4)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица;

$$\Psi_N = \frac{\sin N\Phi}{\sin \Phi}, \quad (1.5)$$

где Φ находится как корень уравнения:

$$\cos \Phi = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{t} \right\}. \quad (1.6)$$

Величина Ψ_N называется коэффициентом интерференции. Он характеризует интенсивность взаимного влияния волн, переотраженных от различных сегментов. Для системы, состоящей из одного сегмента ($N = 1$), как и следовало ожидать, $\Psi_1 = 1$, $\Psi_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{M}_0$. Для $N > 1$ Ψ_N зависит от величины Φ , которая, в свою очередь, зависит от коэффициента отражения.

Решетка Брэгга, состоящая из обратимых систем без потерь, сама является обратимой системой без потерь, поэтому ее матрица передачи может быть представлена в виде:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/t_N^* & r_N/t_N \\ r_N^*/t_N^* & 1/t_N \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Из (1.4) легко выразить комплексные коэффициенты отражения и прохождения t_N и r_N через t и r . Возьмем выражение, получающееся для элемента (1,2) матрицы \mathbf{M} :

$$\frac{r_N}{t_N} = \Psi_N \frac{r}{t}. \quad (1.8)$$

Обозначим коэффициенты прохождения и отражения по мощности всей системы через R_N и T_N . Пользуясь тождествами,

справедливыми для **M**-матрицы системы без потерь ($R_N = |r_N|^2$, $T_N = |t_N|^2$, $T_N + R_N = 1$) нетрудно получить:

$$T_N = \frac{T}{\Psi_N^2(1-T) + T}, \quad (1.9)$$

$$R_N = 1 - T_N = \frac{\Psi_N^2 R}{1 - R + \Psi_N^2}. \quad (1.10)$$

Из равенства (1.10) следует, что коэффициент отражения от решетки Браве, образованной из N сегментов, связан с коэффициентом отражения единичного сегмента. За счет эффектов интерференции волн, отраженных от границ сегментов, появляется коэффициент Ψ_N . В соответствии с формулой (1.5) он зависит от количества сегментов N и параметра Φ , который связан с комплексным коэффициентом отражения t соотношением (1.6).

Предельный случай

Зависимость коэффициента отражения R_N от коэффициента отражения единичного сегмента R приобретает более простой вид в двух предельных случаях:

1. Если коэффициент отражения единичного сегмента очень мал: $R \ll 1$ и Ψ_N^2 не слишком большое, так что $\Psi_N^2 R \ll 1$. Тогда формула (1.10) принимает вид:

$$R_N \approx \Psi_N^2 R = \frac{\sin^2 N\Phi}{\sin^2 \Phi} R. \quad (1.11)$$

Соотношение (1.11) часто получают без использования матричной оптики для решетки Брэгга в виде N слабоотражающих равноудаленных зеркал. При этом игнорируются вторичные отраженные волны.

2. В случае, если $\Psi_N^2 \ll 1$:

$$R_N = \frac{\Psi_N^2 R}{1 + \Psi_N^2 R}. \quad (1.12)$$

Формула (1.12) – типична для систем с обратной связью. В данном случае обратная связь обусловлена множественными внутренними отражениями от границ сегментов. В пределе $R\Psi_N^2 \gg 1$ коэффициент отражения от системы из N сегментов достигает единицы, то есть решетка Брэгга ведет себя как идеальное зеркало, не смотря на то, что каждый из N сегментов является лишь частично отражающим. Большие значения коэффициента интерференции Ψ_N ускоряют достижение коэффициентом R_N значения 1 по мере роста R .

Режимы распространения света в решетке Брэгга

В зависимости от значения коэффициента интерференции Ψ_N , который зависит от Φ через соотношение (1.5), можно выделить два режима распространения электромагнитных волн в решетке Брэгга:

1). *Режим нормального распространения.* Этот режим определяется как режим, при котором Φ – действительное число. В режиме нормального распространения свет частично проходит через решетку за исключением счетного количества дискретных значений, при которых происходит полное прохождение.

2). *Режим «аномального» распространения* – это режим, при котором Φ приобретает комплексные значения. В «аномальном» режиме Ψ_N может быть сколь угодно большим, то есть режим полного отражения реализовывается на целой полосе частот.

Ниже оба режима рассмотрены детально.

Режим «нормального» распространения.

Из (1.6) можно получить Φ в явном виде:

$$\Phi = \text{Arccos} \left(\text{Re} \left\{ \frac{1}{t} \right\} \right). \quad (1.13)$$

Функция (1.13) – многозначна, но поскольку функция $\Psi_N^2 = \frac{\sin^2 N\Phi}{\sin^2 \Phi}$ (входящая в формулу (1.5)) имеет период π , достаточно анализировать лишь *главные* значения $\text{Arccos}(x)$, которыми считаются те, что лежат в интервале $x \in [0; \pi]$. Главные значения Arccos будем обозначать через arccos .

Поскольку область допустимых *действительных* значений функции $\text{Arccos}(x)$ ограничена интервалом $[-1; 1]$, условие «нормального» распространения можно записать в виде:

$$\left| \text{Re} \left\{ \frac{1}{t} \right\} \right| \leq 1. \quad (1.14)$$

Так как R_N есть монотонно возрастающая функция Ψ_N^2 , максимум коэффициента отражения наблюдается при максимальном Ψ_N^2 . Нетрудно показать, что максимальное значение Ψ_N^2 соответствует Φ кратным π , включая 0. При этом функция $\Psi_N = \frac{\sin N\Phi}{\sin \Phi}$ имеет неопределенность типа $\frac{0}{0}$, раскрывая которую получим:

$$\Psi_N^{\max} = \lim_{\Phi \rightarrow \pi n} \frac{\sin N\Phi}{\sin \Phi} = \pm N,$$

где знак несущественен, поэтому мы не будем его анализировать. Кроме того, можно показать, что на периоде $[0; \pi]$ Ψ_N будет иметь $N - 2$ локальных максимума/минимума, не превышающих по абсолютной величине N .

Таким образом, максимальное значение R_N :

$$R_N^{\max} = R_N(\Psi_N^{\max}) = \frac{N^2 R}{1 - R + N^2 R}. \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что R_N^{\max} не может в точности равняться единице, если только коэффициент отражения единичного сегмента R не равен 1 (а это тривиальный случай). Например, для $N = 10, R = 0.5$ $R_N^{\max} \approx 0.99$.

Нулевые значения R_N или *полное прохождение* возможно даже если коэффициент отражения R каждого сегмента значителен:

$$R_N = \frac{\Psi_N}{1 - R + \Psi_N R} = 0 \Rightarrow \Psi_N = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin N\Phi = 0; \\ \sin \Phi \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi = \frac{\pi}{N} g, \\ g \in \{Z\} \setminus \{Nn\}, \end{cases}$$

где $g \in Z, n \in Z$. То есть $R_N(\Phi)$ имеет на каждом из интервалов $\Phi \in [\pi n; \pi(n+1)]$ $N - 1$ нулей. Частоты, соответствующие этим нулям можно назвать резонансными; они имеют много общего резонансными частотами/энергиями электрона, который туннелирует через систему из N одинаковых барьеров, разделенных одинаковыми ямами.

Убедиться в справедливости проведенного здесь анализа можно в **Приложении**.

«Аномальный» режим распространения (или режим полного отражения)

В соответствии с определением режима, «аномальный» режим имеет место если:

$$|\cos \Phi| = \left| \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{t} \right\} \right| > 1. \quad (1.16)$$

Это возможно лишь при комплексных аргументах функции \cos . Представим аргумент косинуса в виде:

$$\Phi = \Phi_R + i\Phi_I. \quad (1.17)$$

Используя тригонометрическое тождество:

$$\cos(\Phi_R + i\Phi_I) = \cos \Phi_R \operatorname{ch} \Phi_I - i \sin \Phi_R \operatorname{sh} \Phi_I,$$

уравнение (1.6) можно представить в виде эквивалентной ему системы:

$$\cos \Phi = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{t} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \Phi_R = 0, \\ \cos \Phi_R \operatorname{ch} \Phi_I = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{t} \right\}, \end{cases} \quad (1.18)$$

которая имеет решения:

$$\begin{cases} \Phi_R = \pi n, n \in Z; \\ \operatorname{ch} \Phi_I = \left| \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{t} \right\} \right|. \end{cases}$$

Таким образом, (1.5) в «аномальном» режиме можно преобразовать так:

$$\Psi_N = \frac{\sin N\Phi}{\sin \Phi} = \frac{\sin \{N(\pi m + i\Phi_I)\}}{\sin \{\pi m + i\Phi_I\}} = \pm \frac{\operatorname{sh} \Phi_I N}{\operatorname{sh} \Phi_I}.$$

При больших аргументах функция $|\Psi_N(\Phi)|$ ведет себя как $\exp\{\Phi_I(N-1)\}$. Таким образом, увеличивая количество сегментов N можно добиться быстрого увеличения модуля коэффициента интерференции в «аномальном» режиме. Поэтому, в соответствии с (1.5), коэффициент отражения от решетки Брэгга в аномальном режиме очень быстро стремится к 1 с увеличением N . Физическая интерпретация этого факта состоит в том, что по мере проникновения вглубь решетки происходит быстрое ослабление амплитуды падающей волны. Во многом это явление схоже с полным внутренним отражением.

Выводы

Поскольку Φ зависит от комплексного коэффициента отражения t , который, в свою очередь, зависит от частоты ν , рассмотренные режимы распространения соответствуют различным спектральным полосам (или полосам частот).

Полосы частот, соответствующие режиму «аномального» распространения, называются **полосами «заграждения»**. Во всей полосе заграждения коэффициент отражения $R_N \approx 1$.

Полосы частот, соответствующие «нормальному» режиму распространения, называются **полосами пропускания**. На полосе пропускания происходит частичное отражение света, зависимость должна иметь «пульсирующий» характер, поскольку имеется также $N - 1$ нулей R_N – то есть частот, при которых волна проходит полностью.

Пример. Система частично отражающих зеркал.

Рассмотрим решетку Брэгга, состоящую из $N = 10$ частично отражающих зеркал, разнесенных друг от друга на расстояние Λ , погруженных в среду с коэффициентом преломления n . Единичный сегмент такой решетки представляет собой участок однородной среды и прилегающее к нему частично отражающее зеркало (рис. 3, а).

Определим спектральную характеристику коэффициента отражения такой решетки, считая, что нам известно как расстояние между зеркалами Λ , так и комплексные коэффициенты отражения/прохождения r/t .

Найдем матрицу передачи единичного сегмента. Он состоит из слоя однородной среды с коэффициентом преломления n , шириной Λ , матрица передачи \mathbf{M}_1 которого:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

и частично отражающего зеркала, матрица передачи которого:

$$\mathbf{M}_2 = \frac{1}{|t|} \begin{bmatrix} 1 & i|r| \\ -i|r| & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Матрица передачи единичного сегмента:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_1 = \frac{1}{|t|} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi} & i|r|e^{i\varphi} \\ -i|r|e^{-i\varphi} & e^{i\varphi} \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

где

$$\varphi \equiv nk_0\Lambda = \pi \frac{\nu}{\nu_B}. \quad (1.22)$$

Величина $\nu_B = \frac{c}{2\Lambda}$ называется *брэгговской частотой*.

Из матрицы передачи сегмента следует, что $t = |t|e^{i\varphi}$, и, таким образом:

$$\cos \Phi = \frac{1}{|t|} \cos \varphi, \text{ если } |\cos \varphi| \leq |t|, \quad (1.23)$$

$$\operatorname{ch} \Phi_I = \frac{1}{|t|} |\cos \varphi|, \text{ если } |\cos \varphi| > |t| \quad (1.24)$$

Соотношения между Φ и φ (нормальный режим), и Φ_I и φ (аномальный режим) нелинейны и необычны (рис. 3, б). Соответствующие соотношения между коэффициентом отражения по мощности R_N и частотой (которая пропорциональна φ в силу (1.22)) приведены на рис. 3, в.

В режиме нормального распространения, обозначенном затененными областями, Φ действительно, а коэффициент отражения, как и предсказывалось выше, имеет множественные пики, между которыми находятся точки с $R_N = 0$. Ни один пик, однако, не достигает единицы, не смотря на то, что максимальное значение $|\Psi_N|$ составляет $N = 10$.

Существенно иной характер имеет зависимость $R_N(\nu)$ в «аномальном» режиме, когда Φ комплексно. Коэффициент интерференции достигает значения ≈ 3000 в центре полосы ($\varphi = \pi$), где $|t|^2 = 0.5$. При значениях $\varphi(\nu)$, лежащих в таких полосах, происходит практически полное отражение ($R_N \approx 1$). Это и есть полосы «запираения», предсказанные выше.

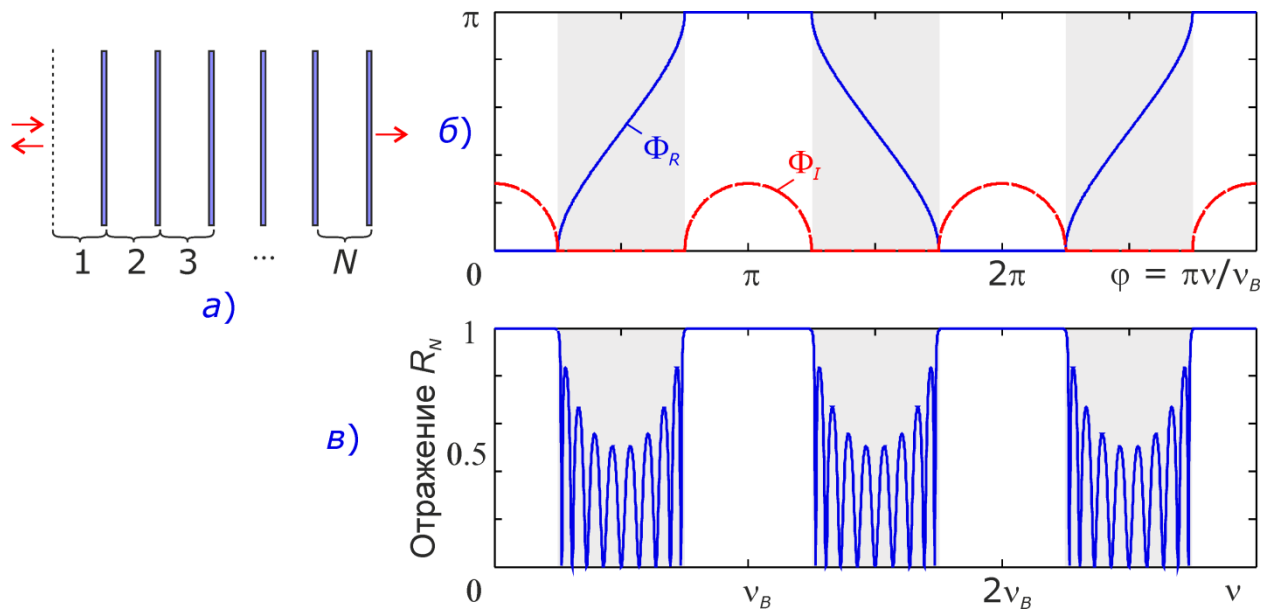


Рис. 3. Решетка Брэгга, образованная из $N = 10$ одинаковых зеркал с коэффициентом отражения $|r|^2 = 0.5$ (а); зависимость Φ от запаздывания фазы между зеркалами $\varphi = nk_0\Lambda$. Показаны мнимые и действительные составляющие $\Phi = \Phi_R + i\Phi_I$ (б); Коэффициент отражения R_N как функция частоты (в единицах частоты Брэгга $\nu_B = c/2\Lambda$) (в). Внутри полос задержки коэффициент отражения приблизительно равен единице. Полосы пропускания на графиках а) и б) затенены.

Приложение. Численный анализ «нормального» режима распространения ($|\cos \Phi| \leq 1 \Leftrightarrow \Phi \in [0, \pi]$).

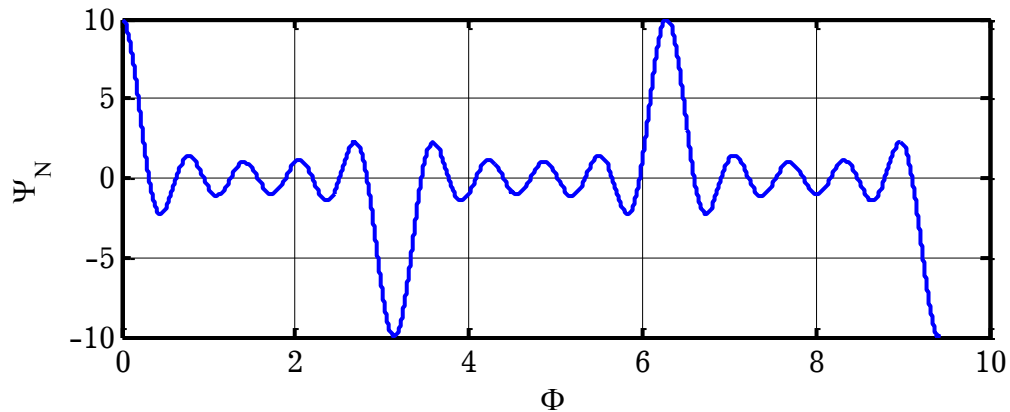


Рис. П1. Функция $\Psi_N(\Phi) = \sin N\Phi / \sin \Phi$ при $N = 10$. Видно, что абсолютная величина Ψ_N не превышает $N = 10$.

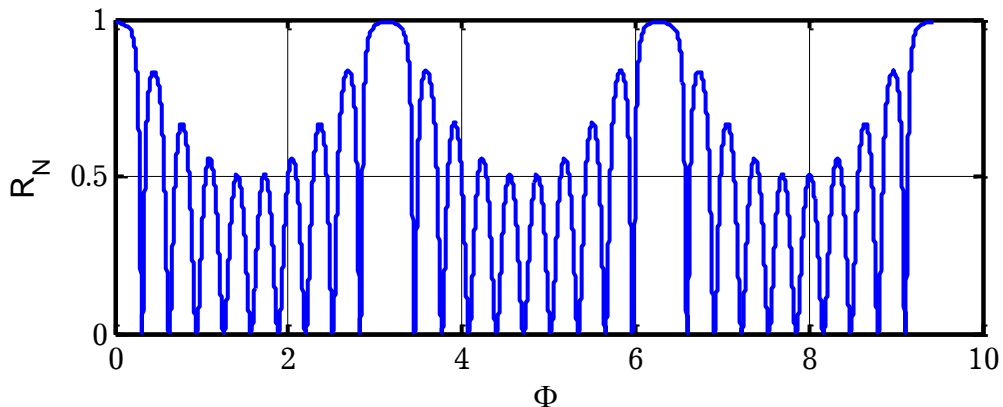


Рис. П2. Функция $R_N(\Phi) = \frac{\Psi_N^2(\Phi)}{1 - R + \Psi_N^2(\Phi)^2}$ в нормальном режиме распространения ($N = 10; R = 0.5$). Видно, что R_N^{\max} немного меньше 1 и, согласно формуле (1.15), равно 0.995 (точно). Кроме того, на интервале $[0; \pi]$ существуют $N - 1 = 9$ нулей и $N - 2 = 8$ локальных максимумов.