Додаток до гл. 1

МАТЕМАТИЧНА ТЕОРІЯ ПОЛЯ.

1. Скалярні та векторні поля

Скалярна величина V, яка приймає певні значення в кожній точці простору $\mathbf{r}$, називається скалярною функцією точки, або *скалярним полем* $V = V(\mathbf{r})$ (наприклад, поле температури, потенціалу і т. д.). Визначаючи точку $\mathbf{r}$ її координатами, одержуємо вираз скалярного поля у вигляді функції трьох змінних обраної системи координат: у декартовій – $V(x, y, z)$, циліндричній – $V(r, \varphi, z)$ та сферичній – $V(r, \varphi, \theta)$.

Скалярне поле можна зображувати з допомогою поверхонь однакового рівня, які утворюються точками, для яких функція $V(\mathbf{r})$ має одне й те саме значення $V(\mathbf{r}) = \text{const}$. Надаючи константі різних значень, отримуємо сукупність таких поверхонь.

Для двовимірного поля, яке залежить тільки від двох змінних, наприклад, x та y, замість поверхні матимемо лінію постійного рівня (ізолінію). З рівняння $V(x, y) = \text{const}$ для різних значень константи можна отримати сімейство ізоліній, наприклад, лінії однакової температури (ізотерми), лінії постійного тиску (ізобари) або однакової висоти на географічних картах, лінії однакового потенціалу (ізопотенціалі або, частіше, еквіпотенціалі), тощо. Звичайно, на цих лініях треба вказувати відповідні значення, які обирають з певним інтервалом (рис. П.1.1).

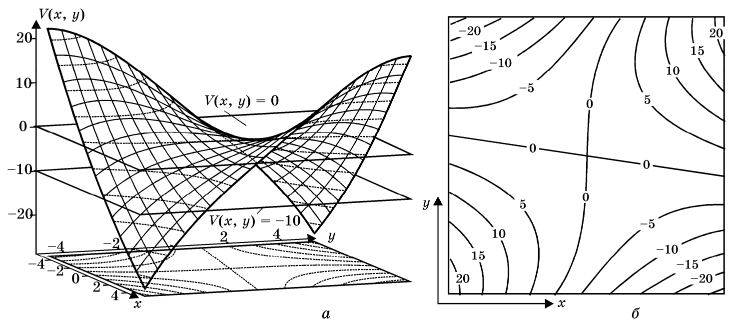

Рис. П.1.1. Зображення двовимірного скалярного поля (*а*) у вигляді функції $V(x, y)$. Лінії її перетину з горизонтальними площинами утворюють лінії рівного рівня (штрихові). Їх сімейство, спроектоване на площину xy, утворює плоске зображення (*б*) поля з позначенням „висоти” рівня перетинаючої площини.

Векторна функція $\mathbf{E}$, яка приймає у кожній точці простору певне значення, називається *векторним полем* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$. Векторне поле можна визначити за допомогою трьох скалярних функцій від трьох координат. Наприклад, у декартовій системі координат

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x E_x(x, y, z) + \mathbf{e}_y E_y(x, y, z) + \mathbf{e}_z E_z(x, y, z),$$

де $\mathbf{e}_{x, y, z}$ – орти відповідних координатних осей.

Векторні поля зображують за допомогою силових ліній (для силових полів), або ліній потоку (для полів швидкості, струму тощо) таким чином, щоб дотичні до них відповідали напрямку векторів, а їх щільність – значенню довжин векторів. Ці лінії задовольняють рівнянню

$$dx/E_x = dy/E_y = dz/E_z,$$

або для двовимірних полів $\mathbf{E}(x, y)$

$$dx/E_x = dy/E_y.$$

Побудова силових ліній потребує додаткових обчислювальних витрат для розв’язку диференціальних рівнянь, тому частіше використовують інший спосіб. Він полягає у побудові векторів поля для певної дискретної сукупності точок просотру, як це зображено на рис. П.1.2.

2. Диференціальні оператори

У теорії поля звичайно використовують три види операторів, пов’язаних з операціями диференціювання по просторових координатах:

градієнт – оператор, що діє на скалярну функцію, а результатом є векторна функція – $\text{grad} f(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r})$;

дивергенція – оператор, результатом дії якого на векторну функцію є скалярна – $\text{div}\, \mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$;

ротор (інакше *ротація* або *вихор*) – оператор, що діючи на векторну функцію утворює також векторну функцію – $\text{rot}\, \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ (іноді позначають „curl”).

***Градієнтом** скалярної функції V* називають вектор, направлений по нормалі $\mathbf{e}_n$ до поверхні постійного рівня функції V у бік її зростання і який чисельно дорівнює зміненню функції V в даній точці поля на одиницю довжини вздовж нормалі, тобто швидкості:

$$\text{grad}\, V = \mathbf{e}_n\, dV/dn.$$

Фізично градієнт характеризує максимальну просторову швидкість зміни функції V у даній точці поля. На рис. П.1.2.

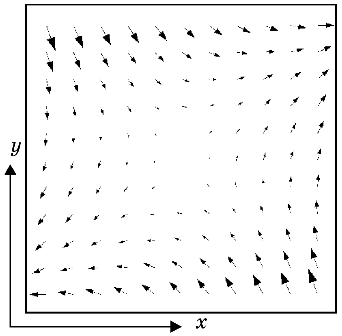

Рис. П.1.2. Зображення двовимірного векторного поля у вигляді векторів поля, побудованих для обраного масиву точок простору.

зображено вектори, які є градієнтом функції $V(x, y)$, представленої на рис. П.1.1.

Правила обчислення градієнта у декартовій системі (x, y, z)

$$\operatorname{grad} V = \mathbf{e}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial V}{\partial z},$$

у системі циліндричних координат (r, φ, z)

$$\operatorname{grad} V = \mathbf{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial V}{\partial z},$$

у системі сферичних координат (r, φ, θ)

$$\operatorname{grad} V = \mathbf{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Диференціал скалярного поля

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = d\mathbf{n}\cdot \operatorname{grad} V$$

Градієнт від неявної функції

$$\operatorname{grad} V(\varphi(\mathbf{r})) = (\partial V/\partial\varphi)\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r})$$

В основі поняття дивергенції лежить поняття *потоку* вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ через поверхню. Він обчислюється таким чином: 1) поверхня S розбивається (рис. П.1.3) на n малих („елементарних”) площадок dS_i, які вважаються плоскими, яким відповідають перпендикулярні до них вектори $d\mathbf{S}_i$ і в межах яких векторне поле можна вважати незмінним; 2) підраховується скалярний добуток $\mathbf{A}_i d\mathbf{S}_i$ для кожної площадки, тобто вектор $\mathbf{A}_i$ проектується на напрям вектора $d\mathbf{S}_i$ і довжина проекції домножається на dS_i з урахуванням знаку; 4) отримані таким чином для кожної площадки скалярні добутки підсумовуються; 5) робиться граничний перехід при $n\to\infty$ і $dS\to 0$:

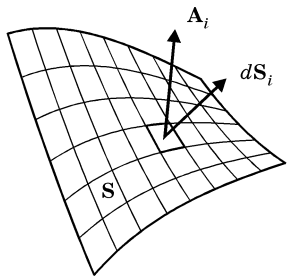

Рис. П.1.3. До обчислення потоку вектора A через поверхню S.

$$P = \lim_{dS\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{A}_i d\mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{A}\,d\mathbf{S}.$$

Отриманий інтеграл і називається потоком вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ через поверхню S. Наприклад, якщо $\mathbf{A}$ є вектором швидкості води, то P дорівнює її об’єму, що перетинає поверхню S за одиницю часу.

***Дивергенція** вектора* $\mathbf{A}$ є математична операція, здійснювана над векторною функцією, яка визначається таким чином:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V_r\to 0}\left(\oint_S \mathbf{A}\,d\mathbf{S}\Big/\Delta V_r\right)$$

В чисельнику дробу стоїть інтеграл по *замкненій* поверхні S, що оточує елементарний об’єм ΔV_r, або потік вектора $\mathbf{A}$ через замкнену поверхню. Граничним переходом елементарний об'єм стягується в точку. Таким чином, div$\mathbf{A}$ характеризує поле в точці. В залежності від взаємного напрямку вектора $\mathbf{A}$ і нормалі до площі $d\mathbf{S}$ дивергенція може бути додатньою (якщо $\mathbf{A}$ і $d\mathbf{S}$ утворюють гострий кут) або від'ємною (якщо кут тупий).
Щоб div$\mathbf{A}$ була відмінною від нуля, необхідно мати в об'ємі ΔV_r або джерело поля вектора $\mathbf{A}$ (дивергенція додатня), або споживач цього поля (стік). В останньому випадку силові лінії $\mathbf{A}$ направлені усередину об'єму ΔV_r; div$\mathbf{A}$ – від'ємна.

Правила обчислення дивергенції у декартовій системі (x, y, z)

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

у циліндричних координатах (r, φ, z)

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

В основі поняття ротору лежить поняття *циркуляції* вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ по деякій замкненій кривій l. Вона обчислюється таким чином: 1) крива розбивається довільним чином на n „елементарних” ділянок довжиною dl_i (рис. П.1.3), які можна вважати прямими, кожній з яких відповідає дотичний до неї вектор $d\mathbf{l}_i$ (з врахуванням напрямку обходу кривої), і такими, що в її межах вектор $\mathbf{A}_i$ можна прийняти незмінним; 2) підраховується скалярний добуток $\mathbf{A}_i d\mathbf{l}_i$ для кожної ділянки, тобто вектор $\mathbf{A}_i$ проектується на напрям вектора $d\mathbf{l}_i$ і довжина проекції домножається на dl_i з урахуванням знаку; 4) отримані таким чином для кожної ділянки скалярні добутки підсумовуються; 5) робиться граничний перехід при $n \to \infty$ і $dl \to 0$:

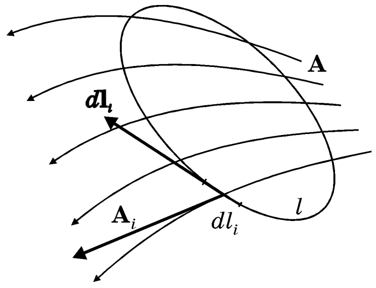

Рис. П.1.4. До обчислення циркуляції вектора A по контуру l.

$$C = \lim_{dl \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{A}_i d\mathbf{l}_i = \int_S \mathbf{A}\, d\mathbf{l}\,.$$

***Ротор** вектора* $\mathbf{A}$ – математична операція, здійснювана над векторною функцією, яка визначається таким чином:

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{e}_n \lim_{\Delta S \to 0}\left(\oint_S \mathbf{A}\, d\mathbf{l} \Big/ \Delta S \right).$$

В чисельнику дробу стоїть інтеграл по замкненому контуру l, *що обмежує елементарну площу* ΔS, $\mathbf{e}_n$ – одиничний вектор, нормальний до площадки ΔS. Граничним переходом елементарна площадка стягується в точку. При цьому на кожному кроці її зменшення напрям площадки встановлюється так, щоб дріб приймав максимальне значення. Таким чином, ротор характеризує поле в точці і являє собою вектор, орієнтований по нормалі до площі, вздовж границі якої здійснюється обхід в контурному інтегралі. Нормаль і напрямок обходу зв’язані правилом правого гвинта: напрямок обходу співпадає з рухом рукоятки, нормаль – з поступальним рухом гвинта. Якщо інтеграл по контуру дорівнює нулю, то і $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$. Поле, здатне створювати обертання турбіни, що міститься в ньому, має ротор.

Правила обчислення ротора:

у декартовій системі (x, y, z):

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right),$$

у циліндричній системі координат:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_\varphi\left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) + \mathbf{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}\right).$$

3. Оператори Гамільтона та Лапласа

Для скорочення запису при використанні диференціальних операторів іноді використовують оператор Гамільтона ∇ („набла”). Це оператор, який записується як символічний вектор

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

З його застосуванням градієнт знаходиться як дія оператора на скалярну функцію – $\operatorname{grad}V = \nabla V$, дивергенція як скалярний добуток оператора набла і векторної функції – $\nabla\mathbf{A} = \operatorname{div}\mathbf{A}$, а ротор як їх векторний добуток – $\operatorname{rot}\mathbf{A} = [\nabla \times \mathbf{A}]$.

Дворазове застосування оператора ∇ до скалярної функції приводить до оператора Лапласа (лапласіана):

$$\nabla(\nabla V) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}V) = \nabla^2 V = \Delta V,$$

де $\nabla\nabla = \nabla^2$ або Δ — оператор Лапласа. Він обчислюється через другі похідні по координатах

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

(у декартових координатах);

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

(у циліндричних координатах).

4. Деякі тотожності

$$\nabla(\nabla\times\mathbf{A}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{A}) \equiv 0;$$

$\nabla\times(\nabla V) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}V) \equiv 0$

$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{A}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A},$

$\mathrm{div}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = \mathbf{B}\mathrm{rot}\ \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathrm{rot}\ \mathbf{B},$

$\mathrm{div}(V\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathrm{grad}V + V\mathrm{div}\mathbf{A},$

$\mathrm{grad}(V\psi) = V\mathrm{grad}\psi + \psi\mathrm{grad}V,$

$\mathrm{rot}(V\mathbf{A}) = [\mathrm{grad}V\times\mathbf{A}] + V\mathrm{rot}\mathbf{A}.$

5. Основні інтегральні теореми

Теорема Остроградського-Гауса:

$$\oint_S \mathbf{A}\,d\mathbf{S} = \int_{V_r} \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,dV_r$$

Скалярний потік поля **A** крізь замкнену поверхню **S** дорівнює інтегралу від дивергенції **A**, розповсюдженому на об'єм V_r, який обмежений замкненою поверхнею **S** (об'ємний інтеграл перетворюється в поверхневий).

Теорема Стокса:

$$\oint_l \mathbf{A}\,d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,d\mathbf{S}.$$

Циркуляція векторного поля по замкненій кривій l дорівнює потоку ротора цього вектора крізь поверхню **S**, обмежену контуром l (інтеграл по поверхні перетворюється в інтеграл по контуру).

Теорема Гріна:

$$\oint_S \mathrm{grad}\,V\,d\mathbf{S} = \int_{V_r} \nabla^2 V\,dV_r$$

Потік градієнта скалярної функції крізь замкнену поверхню дорівнює поверхневому інтегралу від результату дії лапласіана на цю функцію.