Приложение к гл. 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ.

1. Скалярные и векторные поля

Скалярная величина V, которая принимает определенные значения в каждой точке пространства $\mathbf{r}$, называется скалярной функцией точки, или скалярным полем, $V = V(\mathbf{r})$ (например, поле температуры, потенциала и т. д.). Определяя точку $\mathbf{r}$ ее координатами, получаем выражение скалярного поля в виде функции трех переменных для выбранной системы координат: в декартовой – $V(x, y, z)$, цилиндрической – $V(r, \varphi, z)$ и сферической – $V(r, \varphi, \theta)$.

Скалярное поле можно изображать с помощью поверхностей одинакового уровня, которые образуются точками, для которых функция $V(\mathbf{r})$ имеет одно и то же значение $V(\mathbf{r})$ = const. Придавая константе разные значения, получаем совокупность таких поверхностей.

Для двумерного поля, которое зависит только от двух переменных, например, x и y, вместо поверхности будем иметь линию постоянного уровня (изолинию). Из уравнения $V(x, y)$ = const для разных значений константы можно получить семейство изолиний, например, линии одинаковой температуры (изотермы), линии постоянного давления (изобары) или одинаковой высоты на географических картах, линии одинакового потенциала (изопотенциали или, чаще, эквипотенциали), и тому подобное. Конечно, на этих линиях нужно указывать соответствующие значения, которые выбирают с определенным интервалом (рис. П.1.1).

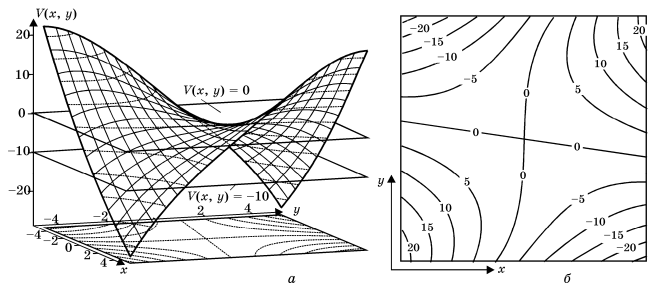

Рис. П.1.1. Изображение двумерного скалярного поля (*а*) в виде функции $V(x, y)$. Линии её пересечения с горизонтальными плоскостями образуют линии равного уровня (штриховые). Их семейство, спроектированное на плоскость *xy*, образует плоское изображение (*б*) поля с указанием „высоты” уровня секущей плоскости.

Векторная функция $\mathbf{E}$, которая принимает в каждой точке пространства $\mathbf{r}$ определенное значение, называется векторным полем $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$. Векторное поле можно определить с помощью трех скалярных функций от трех координат. Например, в декартовой системе координат

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x E_x(x, y, z) + \mathbf{e}_y E_y(x, y, z) + \mathbf{e}_z E_z(x, y, z),$$

где $\mathbf{e}_{x,\,y,\,z}$ – орты соответствующих координатных осей.

Векторные поля изображают с помощью силовых линий (для силовых полей), или линий потока (для полей скорости, тока, и тому подобное), таким образом, чтобы касательные к ним отвечали направлению векторов, а их плотность – значению длин векторов. Эти линии удовлетворяют уравнению

$$dx/E_x = dy/E_y = dz/E_z,$$

или для двумерных полей $\mathbf{E}(x, y)$

$$dx/E_x = dy/E_y.$$

Построение силовых линий требует дополнительных вычислительных затрат для решения дифференциальных уравнений, поэтому чаще используют другой способ. Он заключается в построении векторов поля для определенной дискретной совокупности точек пространства, как это изображено на рис. П.1.2.

2. Дифференциальные операторы

В теории поля обычно используют три вида операторов, связанных с операциями дифференцирования по пространственным координатам:

градиент – оператор, который действует на скалярную функцию, а результатом является векторная функция – $\mathrm{grad} f(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r})$;

дивергенция – оператор, результатом действия которого на векторную функцию будет скалярная – $\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$;

ротор (иначе *ротация* или *вихрь*) – оператор, который, действуя на векторную функцию, образует также векторную функцию – $\mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ (иногда обозначают „curl”).

Градиентом скалярной функции V называют вектор, направленный по нормали $\mathbf{e}_n$ к поверхности постоянного уровня функции V в сторону ее возрастания и который численно равен изменению функции V в данной точке поля на единицу длины вдоль нормали, то есть скорости:

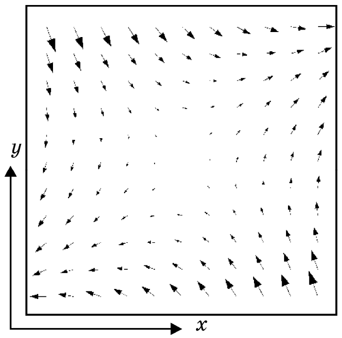

Рис. П.1.2. Изображение двумерного векторного поля в виде векторов поля, построенных для выбраного массива точек пространства.

$$\operatorname{grad} V = \mathbf{e}_n\, dV/dn.$$

Физически градиент характеризует максимальную пространственную скорость изменения функции V в данной точке поля. На рис. П.1.2. изображены векторы, которые являются градиентом функции $V(x,\ y)$, представленной на рис. П.1.1.

Правила вычисления градиента в декартовой системе $(x,\ y,\ z)$

$$\operatorname{grad} V = \mathbf{e}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial V}{\partial z},$$

в системе цилиндрических координат (r φ, z)

$$\operatorname{grad} V = \mathbf{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial V}{\partial z},$$

в системе сферических координат (r, φ, θ)

$$\operatorname{grad} V = \mathbf{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Дифференциал скалярного поля

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = d\mathbf{n}\cdot \operatorname{grad} V$$

Градиент от неявной функции

$$\operatorname{grad}V(\varphi(\mathbf{r})) = (\partial V/\partial\varphi)\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}).$$

В основе понятие дивергенции лежит понятие *потока* вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ через поверхность. Он вычисляется таким образом: 1) поверхность S разбивается (рис. П.1.3) на n малых („элементарных") площадок dS_i, которые считаются плоскими, которым отвечают перпендикулярные к ним векторы $d\mathbf{S}_i$ и в пределах которых векторное поле можно считать неизменным; 2) подсчитывается скалярное произведение $\mathbf{A}_i d\mathbf{S}_i$ для каждой площадки, то есть вектор $\mathbf{A}_i$ проектируется на направление вектора

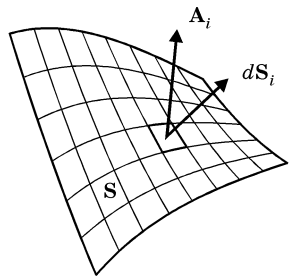

Рис. П.1.3. К вычислению потока вектора А **через поверхность** ***S*.**

$d\mathbf{S}_i$ и длина проекции домножаеться на dS_i с учетом знака; 4) полученные таким образом для каждой площадки скалярные произведения суммируются; 5) делается предельный переход при $n \to\infty$ и $dS \to 0$:

$$P = \lim_{dS\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{A}_i d\mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{A}\, d\mathbf{S}.$$

Полученный интеграл и называется потоком вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ через поверхность S. Например, если $\mathbf{A}$ является вектором скорости воды, то P равняется ее объему, который пересекает поверхность S за единицу времени.

Дивергенция вектора А является математической операцией, осуществляемой над векторной функцией и определяемой таким образом:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V_r\to 0}\left(\oint_S \mathbf{A}\, d\mathbf{S}\Big/\Delta V_r\right)$$

В числителе дроби стоит интеграл по *замкнутой* поверхности S, которая окружает элементарный объем ΔV_r, или поток вектора $\mathbf{A}$ через замкнутую поверхность. Предельным переходом элементарный объем стягивается в точку. Таким образом, div**A** характеризует поле в точке. В зависимости от взаимного направления вектора $\mathbf{A}$ и нормали к поверхности $d\mathbf{S}$ дивергенция может быть додатньою (если $\mathbf{A}$ и $d\mathbf{S}$ образуют острый угол) или отрицательной (если угол тупой).

Чтобы div**A** отличалась от нуля, необходимо иметь в объеме ΔV_r или источник поля вектора $\mathbf{A}$ (дивергенция положительная), или «потребитель» этого поля (сток). В последнем случае силовые линии $\mathbf{A}$ направлены внутрь объема ΔV_r, div**A** – отрицательная.

Правила вычисления дивергенции в декартовой системе $(x,\ y,\ z)$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

в цилиндрических координатах (r, φ, z)

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

В основе понятия ротора лежит понятие *циркуляции* вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ по некоторой замкнутой кривой l. Она вычисляется таким образом: 1) кривая разбивается произвольно на n „элементарных" участков длиной dl_i (рис. П.1.3), которые можно считать прямыми, каждой из которых отвечает касательный к ней вектор $d\mathbf{l}_i$ (с учетом направления обхода кривой), и таких, что в ее пределах вектор $\mathbf{A}_i$ можно принять неизменным; 2) подсчитывается скалярное произведение $\mathbf{A}_i d\mathbf{l}_i$ для каждого участка, то есть вектор $\mathbf{A}_i$ проектируется на направление вектора $d\mathbf{l}_i$ и длина проекции домножається на dl_i с учетом знака; 4) полученные таким образом для каждого участка скалярные произведения суммируются; 5) делается предельный переход при $n\to\infty$ и $dl\to 0$:

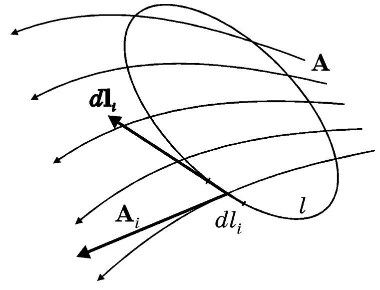

Рис. П.1.4. К вычислению циркуляции вектора А по контуру l.

$$C=\lim_{dl\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{A}_i d\mathbf{l}_i=\int_S \mathbf{A}\,d\mathbf{l}.$$

***Ротор** вектора* $\mathbf{A}$ – математическая операция, осуществляемая над векторной функцией, которая определяется следующим образом:

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\mathbf{e}_n\lim_{\Delta S\to 0}\left(\oint_S \mathbf{A}\,d\mathbf{l}\Big/\Delta S\right).$$

В числителе дроби стоит интеграл по замкнутому контуру l, который ограничивает элементарную площадку ΔS, $\mathbf{e}_n$ – единичный вектор, нормальный к площадке ΔS. Предельным переходом элементарная площадка стягивается в точку. При этом на каждом шаге ее уменьшения направление площадки устанавливается так, чтобы дробь принимала максимальное значение. Таким образом, ротор характеризует поле в точке и представляет собой вектор, ориентированный по нормали к поверхности, вдоль границы которой осуществляется обход в контурном интеграле. Нормаль и направление обхода связаны правилом правого винта: направление обхода совпадает с движением рукоятки, нормаль – с поступательным движением винта. Если интеграл по контуру равняется нулю, то и $\operatorname{rot}\mathbf{A}=0$. Поле, способное создавать вращение турбины, которая находится в нем, имеет ротор.

Правила вычисления ротора:

в декартовой системе (x, y, z)

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\mathbf{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\mathbf{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\mathbf{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right),$$

в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right)+\mathbf{e}_\varphi\left(\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)+\mathbf{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\right).$$

3. Операторы Гамильтона и Лапласа

Для сокращения записи при использовании дифференциальных операторов иногда используют оператор Гамильтона ∇ („набла"). Это оператор, который записывается как символический вектор

$$\nabla=\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

С его использованием градиент находится как действие оператора на скалярную функцию – $\operatorname{grad}V=\nabla V$, дивергенция как скалярное произведение оператора набла и векторной функции $\mathbf{A}$ – $\nabla\mathbf{A}=\operatorname{div}\mathbf{A}$, а ротор как их векторное произведение – $\operatorname{rot}\mathbf{A}=[\nabla\times\mathbf{A}]$.

Двукратное применение оператора ∇ к скалярной функции приводит к оператору Лапласа (лапласиану):

$$\nabla(\nabla V)=\operatorname{div}(\operatorname{grad}V)=\nabla^2 V=\Delta V$$

где $\nabla\nabla=\nabla^2$ или Δ – оператор Лапласа. Он вычисляется через вторые производные по координатам

$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

(в декартовых координатах);

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

(в цилиндрических координатах).

4. Некоторые тождества

$\nabla[\nabla\times\mathbf{A}] = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{A}) \equiv 0$ («вихревое поле – не расходящееся»),
$[\nabla\times(\nabla V)] = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}V) \equiv 0$ («градиентное поле – не вихревое»),
$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{A}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$,
$\mathrm{div}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = \mathbf{B}\mathrm{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathrm{rot}\mathbf{B}$,
$\mathrm{div}(V\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathrm{grad}V + V\mathrm{div}\mathbf{A}$,
$\mathrm{grad}(V\psi) = V\mathrm{grad}\psi + \psi\mathrm{grad}V$,
$\mathrm{rot}(V\mathbf{A}) = [\mathrm{grad}V\times\mathbf{A}] + V\mathrm{rot}\mathbf{A}$.

5. Основные интегральные теоремы

Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{A}\,d\mathbf{S} = \int_{V_r} \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,dV_r\,.$$

Скалярный поток поля **A** через замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции **A**, распространенному на объем V_r, который ограничен замкнутой поверхностью S (объемный интеграл превращается в поверхностный).

Теорема Стокса:

$$\oint_l \mathbf{A}\,d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,d\mathbf{S}.$$

Циркуляция векторного поля по замкнутой кривой l равна потоку ротора этого вектора через поверхность S, ограниченную контуром l (интеграл по поверхности превращается в интеграл по контуру).

Теорема Грина:

$$\oint_S \mathrm{grad}\,V\,d\mathbf{S} = \int_{V_r} \nabla^2 V\,dV_r$$

Поток градиента скалярной функции через замкнутую поверхность равен поверхностному интегралу от результата действия лапласиана на эту функцию.