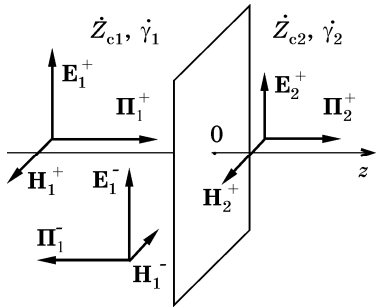


## 4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ БІЛЯ ГРАНИЦІ РОЗДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

### 4.1. ВІДБИВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

У нескінченному однорідному середовищі можливе існування лише хвилі, яка розповсюджується від джерела збудження. Відбивання спостерігається тільки при наявності неоднорідності, зміни параметрів середовища. Для дослідження основних закономірностей і параметрів відбивання розглянемо найпростішу модель відбивання плоскої хвилі від границі розділу двох середовищ (рис. 4.1) при її перпендикулярному падінні на границю. Нехай границя розділу двох середовищ, що відрізняються хвильовим опором та сталою поширення, розташована у точці  $z = 0$ . Електромагнітна хвиля розповсюджується зліва направо, зазнає часткового відбивання від границі і проходить у друге середовище. Для опису полів запишемо розв'язок хвильового рівняння (3.25) для обох середовищ: зліва від границі у вигляді суми падаючої та відбитої хвиль



$$E_1 = E_1^+ e^{-i\gamma_1 z} + E_1^- e^{i\gamma_1 z}, \quad (4.1)$$

$$H_1 = H_1^+ e^{-i\gamma_1 z} - H_1^- e^{i\gamma_1 z},$$

а справа від границі у вигляді тільки падаючої хвилі

$$E_2 = E_2^+ e^{-i\gamma_2 z}, \quad (4.2)$$

$$H_2 = H_2^+ e^{-i\gamma_2 z}.$$

Рис. 4.1. Позначення для аналізу поведінки електромагнітної хвилі біля границі розділу двох середовищ.

Тут  $E_1^+, H_1^+, E_1^-, H_1^-, E_2^+, H_2^+$  – поки невідомі сталі інтегрування, що мають смисл комплексних амплітуд відповідних хвиль. Для зменшення їх кількості скористаємося зв'язком (3.26)

між відповідними амплітудами електричних та магнітних полів:

$$E_1^+ / H_1^+ = E_1^- / H_1^- = Z_{c1}, \quad E_2^+ / H_2^+ = Z_{c2}.$$

Вводячи деякі безрозмірні параметри – коефіцієнт відбивання  $\rho = E_1^- / E_1^+$  і коефіцієнт проходження  $\tau = E_2^+ / E_1^+$ , одержимо вирази для складових поля у вигляді

$$E_1 = E_1^+ (e^{-i\gamma_1 z} + \rho e^{i\gamma_1 z}), \quad H_1 = E_1^+ (e^{-i\gamma_1 z} - \rho e^{i\gamma_1 z}) / Z_{c1}, \quad (4.3, a)$$

$$E_2 = E_1^+ \tau e^{-i\gamma_2 z}, \quad H_2 = E_1^+ \tau e^{-i\gamma_2 z} / Z_{c2}. \quad (4.3, б)$$

Мета цього дослідження – визначити ступінь відбивання й проходження електромагнітної хвилі, тобто визначити коефіцієнти  $\rho$  і  $\tau$ , залежно від параметрів середовищ. Для цього проведемо “зшивання” відповідних функцій по обидва боки від границі на основі граничних умов. Оскільки вектори  $E$  і  $H$  паралельні границі, то  $E_1(-0) = E_2(+0)$ ,  $H_1(-0) = H_2(+0)$  і з (4.3) у точці  $z = 0$  матимемо  $1 + \rho = \tau$  і  $1 - \rho = \tau Z_{c1} / Z_{c2}$ . Розглядаючи останні два вирази як систему рівнянь відносно  $\rho$  і  $\tau$ , в результаті її розв'язку одержимо вирази

$$\rho = (Z_{c2} - Z_{c1}) / (Z_{c2} + Z_{c1}), \quad (4.4)$$

$$\tau = 2Z_{c2} / (Z_{c2} + Z_{c1}),$$

які дозволяють розраховувати коефіцієнти відбивання та проходження для відомих параметрів середовищ. Зазначимо, що у загальному випадку коефіцієнти  $\rho$  і  $\tau$  – комплексні величини, модуль яких характеризує відносну амплітуду хвиль  $E_1^-$  та  $E_2^+$ , а фаза – зміну фази хвилі на поверхні при відбиванні або проходженні.

Аналізуючи одержані вирази, можна побачити, що значення модуля коефіцієнта відбивання лежить у межах  $0 \leq |\rho| \leq 1$ . Однією з крайніх ситуацій є випадок однакових середовищ ( $Z_{c1} = Z_{c2}$ ), коли відбивання відсутнє, тому що фактично відсутня границя розділу. Те саме має місце, наприклад, для двох діелектриків з однаковою діелектричною проникністю. Повне відбивання електромагнітної хвилі відбувається від поверхні ідеально провідного середовища ( $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $Z_{c2} \rightarrow 0$ ). У цьому випадку  $\rho = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$  і амплітуда хвилі при відбиванні не змінюється. Знак “-” для коефіцієнта відбивання означає, що фаза хвилі електричного поля у площині відбивання змінюється на  $180^\circ$ , а фаза хвилі магнітного поля залишається незмінною (другі доданки для  $H_1$  та  $E_1$  у (4.3) відрізняються знаком).

У результаті накладення падаючих і відбитих хвиль перед поверхнею відбивання утворюється так звана “стояча” хвиля. Особливості цього явища можна зрозуміти, розглядаючи

аналітичний вираз (4.3,а) для випадку  $\rho = -1$  і для спрощення  $\alpha = 0$  ( $\dot{\gamma} = k$ ). Відновлюючи часовий множник  $\exp(i\omega t)$  і залишаючи дійсну частину, одержимо

$$\begin{aligned} E_1 &= 2E_m^+ \sin kz \sin(\omega t + \varphi) \\ H_1 &= 2H_m^+ \cos kz \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Дані вирази описують не хвильовий процес, а гармонічні коливання, амплітуда і фаза яких залежать від поздовжньої координати. Миттєві “фотографії” цих коливань, зображені на рис. 4.2,а, зроблені через проміжки часу  $T/8$  і нагадують коливання струни. У межах одного півперіоду коливання відбуваються синфазно, але їхня амплітуда в різних точках різна.

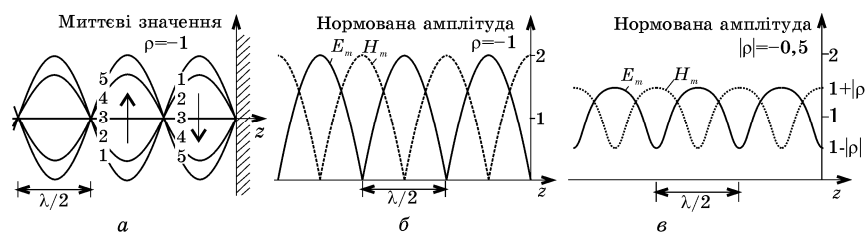


Рис. 4.2. Просторовий розподіл миттєвих значень коливань (а) та їх нормованих амплітуд (б) при повному відбиванні ( $\rho = -1$ ) та (в) частковому ( $\rho = -0,5$ ): суцільні лінії для електричного поля, штрихові – для магнітного.

Розподіл амплітуди, нормованої до амплітуди падаючої хвилі, показаний на рис. 4.2,б. Характерною особливістю є наявність “вузлів”, тобто точок з нульовою амплітудою, і “пучностей”, де амплітуда максимальна і вдвічі перевищує амплітуду падаючої хвилі. Причому положення цих точок у просторі незмінне, що й пояснює використану назву – *стояча хвиля*. Причину такої ситуації зрозуміти неважко – вузли утворюються у тих точках, де падаюча і відбита хвилі зустрічаються у протифазі. Для електричного поля “вузли” розташовані на відстанях, кратних півхвилі, тому що на цих відстанях “набігання” фази при проходженні хвилі туди й назад складає ціле число періодів, а протифазність забезпечується зсувом фази на  $180^\circ$  при відбиванні. Оскільки для магнітного поля фаза при відбиванні не змінюється, то у тих саме точках падаюча й відбита магнітні хвилі будуть зустрічатись синфазно і утворювати “пучності”. Легко уявити, що між двома сусідніми “вузлами” електричного поля будуть розташовані “вузли” магнітного і навпаки.

Подібне явище спостерігається і при неповному відбиванні. Для опису процесів у загальному випадку, коли  $0 \leq |\rho| < 1$ , можна

подати вирази (4.3) для полів над поверхнею відбивання, поновивши для наочності часовий множник  $\exp(i\omega t)$  та вважаючи  $\dot{\gamma} = k$  (втрати відсутні), у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= E_1^+ (1 + \rho e^{i2kz}) e^{i(\omega t - kz)}, \\ \dot{H}_1 &= E_1^+ (1 - \rho e^{i2kz}) e^{i(\omega t - kz)} / Z_{c1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Така форма запису на відміну від (4.3), де поля подаються як сума падаючої та відбитої хвилі, відповідає тільки одній хвилі, що падає, але з амплітудою, яка змінюється залежно від координати (величину  $E_1^+$  вважатимемо дійсною):

$$\begin{aligned} E_m(z) &= E_1^+ |1 + \rho e^{i2kz}|, \\ H_m(z) &= E_1^+ |1 - \rho e^{i2kz}| / Z_{c1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ці функції періодичні у просторі і набувають максимальних значень, у  $(1 + |\rho|)$  раз більших за амплітуду падаючої хвилі, у точках, що зветься “пучностями”. Між ними знаходяться “вузли”, де амплітуда мінімальна і становить  $(1 - |\rho|)$  від падаючої хвилі. З часом просторове положення цих точок не змінюється, тому для процесів, що описуються виразами (4.6), і використовують назву “стояча хвиля”.

Графіки розподілу амплітуд електричного та магнітного полів (рис. 4.2,в) повністю збігаються з такими для амплітуд відповідно напруги і струму у довгій лінії передачі (див. розд. 3.4). Зазначимо також, що вирази для коефіцієнтів відбивання електромагнітної хвилі від границі розділу середовищ та хвилі напруги від навантаження у довгій лінії є подібними за умови відповідної заміни величин. Така аналогія ґрунтується на тому, що ці процеси описуються фактично однаковими хвильовими рівняннями.

Для поглиблення цієї аналогії розглянемо, як змінюються комплексні амплітуди електричного та магнітного полів при проходженні хвилею деякої відстані між точками  $z_1$  та  $z_2$  (рис. 4.3). Запишемо вирази для полів відповідно у цих точках у вигляді суми падаючої та відбитої хвилі:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \dot{E}^+ e^{-ikz_1} + \dot{E}^- e^{ikz_1}, & \dot{H}_1 &= (\dot{E}^+ e^{-ikz_1} - \dot{E}^- e^{ikz_1}) / Z_c; \\ \dot{E}_2 &= \dot{E}^+ e^{-ikz_2} + \dot{E}^- e^{ikz_2}, & \dot{H}_2 &= (\dot{E}^+ e^{-ikz_2} - \dot{E}^- e^{ikz_2}) / Z_c. \end{aligned} \quad (4.8)$$

З допомогою тождеств перетворень, вилучивши з цих виразів амплітуди  $\dot{E}^+$  та  $\dot{E}^-$ , отримаємо вирази для  $\dot{E}_2$  та  $\dot{H}_2$  через амплітуди  $\dot{E}_1$  та  $\dot{H}_1$  та відстань  $\Delta z = z_2 - z_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 &= \dot{E}_1 \cos k\Delta z - i\dot{H}_1 Z_c \sin k\Delta z, \\ \dot{H}_2 &= -i(\dot{E}_1 / Z_c) \sin k\Delta z + \dot{H}_1 \cos k\Delta z. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Цю пропорційність між амплітудами можна описати матричним співвідношенням (рис. 4.3): матриці-стовпці з амплітуд  $E$  та  $H$  зв'язані матрицею передачі

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix} \Big|_{z_1} \quad \Big|_{z_2} \quad \begin{bmatrix} E_2 \\ H_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} E_1 \\ H_1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} \cos k\Delta z & -iZ_c \sin k\Delta z \\ -i \sin k\Delta z / Z_c & \cos k\Delta z \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Рис. 4.3. Позначення до виводу матриці передачі шару однорідного середовища між двома точками.

Матриця передачі для шару речовини при проходженні електромагнітних хвиль повністю співпадає з матрицею передачі відрізка довгої лінії для хвиль напруги і струму. Відмінність у знаках пов'язана з протилежними напрямками відліку поздовжньої координати: у довгій лінії напрямком  $x > 0$  вибрано від навантаження до джерела. Вона зникає у (4.10), якщо координату  $z_2$  взяти меншою за  $z_1$ , тобто при від'ємних значеннях  $\Delta z$ .

Ще одна аналогія спостерігається для трансформації опорів. Якщо ввести поняття комплексного опору для даної точки  $z$  як відношення амплітуд електричного та магнітного полів  $\dot{E}(z) / \dot{H}(z) \equiv Z(z)$ , то, поділивши перший вираз (4.9) на другий, після простих тождеств перетворень отримаємо:

$$Z_2 = Z_c \frac{Z_1 - iZ_c \operatorname{tg} k\Delta z}{Z_c - iZ_1 \operatorname{tg} k\Delta z}. \quad (4.11)$$

Тобто відношення комплексних амплітуд  $\dot{E}$  та  $\dot{H}$  змінюється (трансформується) у просторі за таким самим законом, як і відношення  $V$  та  $I$  вздовж довгої лінії (3.58) з урахуванням напрямку відліку. Використовуючи цю аналогію, при наявності стоячих електромагнітних хвиль можна робити розрахунки, подібні до аналізу властивостей довгих ліній на основі теорії кіл з розподіленими параметрами.

## 4.2 ПРОХОДЖЕННЯ ХВИЛЬ ЧЕРЕЗ ШАР РЕЧОВИНИ

Розглянемо падіння плоскої електромагнітної хвилі на шар речовини товщиною  $d$  з хвильовим опором  $Z_{c2}$ , що межує з двома напівнескінченими середовищами з хвильовими опорами  $Z_{c1}$  та  $Z_{c3}$  (рис. 4.4). Падаюча хвиля зазнає часткового відбивання як від першої, так і від другої границі розділу, і проходить у третє середовище. Повний аналіз цього процесу можна провести, як і у попередньому розділі, зшиваючи з допомогою граничних умов вирази, подібні (4.1) для перших двох середовищ та (4.2) для третього, на кожній границі розділу.

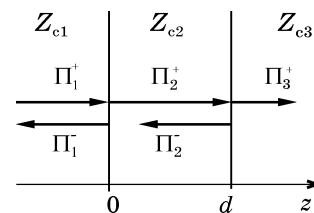


Рис. 4.4. Позначення для аналізу проходження хвилі через шар речовини між двома границями розділу середовищ.

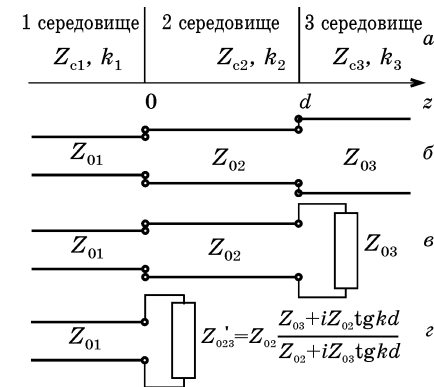


Рис. 4.5. Схемна модель шару речовини товщиною  $d$  між двома середовищами у вигляді відрізків довгих ліній (а) та її трансформування при перерахунку опорів (б, в).

Проте основні властивості шару речовини можна дослідити на основі коефіцієнта відбивання  $\dot{\rho} = \dot{E}_1^- / \dot{E}_1^+$  у першому середовищі. Вираз для нього просто отримати, використовуючи схемну модель (рис. 4.5,а), побудовану на аналогії з довгими лініями. У ній різні середовища моделюються відрізками довгих ліній з відповідними хвильовими опорами  $Z_{0i}$  та хвильовими числами  $k_i = 2\pi/\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Оскільки третя лінія при  $z > d$  нескінченна і в ній не існує відбитої хвилі, то відношення амплітуд напруги і струму  $\dot{V}_3^+ / \dot{I}_3^+$  у всіх точках однакове і дорівнює хвильовому опору  $Z_{03}$ . Тому її можна замінити зосередженим навантаженням з опором, рівним  $Z_{03}$ , приєднаним до відрізка другої лінії (рис. 4.5,б). Використовуючи закон трансформації опорів (3.--), перерахуємо це навантаження через відрізок лінії з довжиною  $d$  та хвильовим опором  $Z_{02}$  на її вхід ( $z = 0$ ):

$$Z'_{03} = Z_{02} \frac{Z_{03} + iZ_{02} \operatorname{tg} k_2 d}{Z_{02} + iZ_{03} \operatorname{tg} k_2 d}. \quad (4.12)$$

Таким чином друга і третя лінія сприймаються першою лінією як еквівалентне навантаження з опором  $Z'_{03}$  (рис. 4.5,б). Тому коефіцієнт відбивання у першій лінії дорівнюватиме

$$\rho = \frac{Z'_{03} - Z_{01}}{Z'_{03} + Z_{01}} = \frac{Z_{02}(Z_{03} - Z_{01}) + i(Z_{02}^2 - Z_{01}Z_{03}) \operatorname{tg} k_2 d}{Z_{02}(Z_{03} + Z_{01}) + i(Z_{02}^2 + Z_{01}Z_{03}) \operatorname{tg} k_2 d}. \quad (4.13)$$

Коефіцієнт відбивання електромагнітних хвиль від першої границі розділу середовищ описується таким саме виразом із відповідною заміною індексів ( $Z_{0i} \rightarrow Z_{ci}$ ).

Аналіз цього виразу показує, що *повне відбивання* можливе за умови, коли шар речовини являє собою ідеально провідне середовище ( $Z_{c2} = 0$ ). Незалежно від опору третього середовища та товщини шару коефіцієнт відбивання дорівнює  $-1$ , тобто відбита і падаюча хвилі на першій границі розділу протифазні.

Якщо третє середовище є ідеальним провідником ( $Z_{c3} = 0$ ), то протифазне відбивання спостерігається на другій границі розділу ( $z = d$ ). При цьому  $Z'_{03} = iZ_{02} \operatorname{tg} k_2 d$  і коефіцієнт відбивання (4.13) у площині першої границі має комплексно спряжені чисельник та знаменник, тому  $|\rho| = 1$ , а його фаза залежить від товщини шару та відношення хвильових опорів  $Z_{01}$  та  $Z_{02}$ .

*Повне проходження* ( $\rho = 0$ ) можливе у трьох випадках. Для кожного з них необхідно сформулювати дві умови, за яких дійсна та уявна частини чисельника у (4.13) дорівнюватимуть 0.

а) У найпростішому випадку, прирівнюючи нулю вирази у дужках чисельника, отримаємо  $Z_{c1} = Z_{c2} = Z_{c3}$ . Фактично ця рівність відповідає трьом однаковим середовищам, коли границі розділу відсутні. Але можливо, що різні середовища мають однакові хвильові опори, наприклад, досить поширеним є випадок, коли два діелектрики мають однакову діелектричну проникність.

б) Якщо вибрати перше й третє середовища з однаковими хвильовими опорами ( $Z_{c1} = Z_{c3}$ ), а товщину шару незалежно від хвильового опору  $Z_{c2}$  кратною половині довжини хвилі ( $d = n\lambda_2/2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), то у цьому разі  $\operatorname{tg} k_2 d = 0$  і відбивання буде відсутнім. Тому так звана “півхвильова пластина”, занурена в інше середовище, буде прозорою. З цієї ж причини півхвильовий відрізок довгої лінії, ввімкнений в іншу лінію, не буде викликати відбивання хвилі.

Проста фізична суть цього явища стає зрозумілою, якщо порівняти між собою коефіцієнти відбивання  $\rho_1 = (Z_{c2} - Z_{c1}) / (Z_{c2} + Z_{c1})$  тільки від першої границі та  $\rho_2 = (Z_{c3} - Z_{c2}) / (Z_{c3} + Z_{c2})$  тільки від другої. За умови  $Z_{c1} = Z_{c3}$  ці коефіцієнти відрізняються лише знаком, тому відбиті хвилі мають однакові амплітуди та

протилежні фази у площинах відбивання. Додатковий набіг фази хвилі, відбитої від другої границі, відповідає проходженню нею відстані  $d$  “туди й назад” і складає  $2k_2 d = 2\pi n$ . Такі хвилі у першому середовищі, як протифазні та рівні за амплітудою, гасять одна одну і результуюча відбита хвиля буде відсутньою.

в) Умови ще однієї можливості повного проходження хвилі через шар речовини можна з'ясувати, попередньо поділивши чисельник та знаменник (4.13) на  $\operatorname{tg} k_2 d$ . Тоді дійсна частина чисельника при різних  $Z_{c1}$  та  $Z_{c3}$  може дорівнювати нулю за рахунок  $\operatorname{ctg} k_2 d = 0$ , а уявна – при  $Z_{c2}^2 = Z_{c1} Z_{c3}$ . Це означає, що товщина шару повинна бути кратною непарній кількості чвертей довжини хвилі ( $d = (2n-1)\lambda_2/4$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), а його електричні параметри – відповідати умові  $Z_{c2} = \sqrt{Z_{c1} Z_{c3}}$ .

Таку властивість *чвертьхвильового шару* використовують в оптиці для виготовлення так званих “просвітлених” лінз, наносячи на поверхню лінзи плівку речовини з діелектричною проникністю  $\varepsilon_{\text{плівки}} = \sqrt{\varepsilon_{\text{лінзи}}}$  та товщиною, що відповідає чверті довжини хвилі червоного кольору, щоб саме у цьому діапазоні зменшити відбивання світла.

У кабельній та хвильовідній техніці подібне використовується у вигляді *чвертьхвильових трансформаторів* для узгодженого з'єднання двох ліній передачі з хвильовими опорами  $Z_{01}$  та  $Z_{02}$  за допомогою відрізка лінії з хвильовим опором  $Z_{0\text{тр}} = \sqrt{Z_{01} Z_{02}}$  та довжиною у чверть хвилі.

Фізична суть такої властивості шару на відміну від попереднього випадку пов'язана з тим, що коефіцієнти відбивання від кожної границі у цьому разі однакові за амплітудою та фазою, а протифазність відбитих від границь хвиль забезпечується додатковим для другої хвилі набігом фази на відстані  $2d$ :  $2k_2 d = (2n-1)\pi$ . Тому в результаті їх інтерференції у першому середовищі відбита хвиля буде відсутньою.

Слід пам'ятати, що розглянуті властивості шару пов'язані з певною довжиною хвилі і є *резонансними*: при відхиленні частоти коливань від розрахункової модуль коефіцієнта відбивання досить швидко зростає. Для розширення смуги частот, у якій проходження хвилі можна вважати у достатній мірі повним, можна використовувати не один шар узгоджуючої речовини, а два і більше, або декілька чвертьхвильових трансформаторів для з'єднання довгих ліній з різними хвильовими опорами. На рис. 4.6 зображені приклади таких з'єднань. Одна з можливостей вибору хвильового опору трансформаторів, що часто використовується на практиці, полягає у тому, що відношення коефіцієнтів відбивання від кожного окремого з'єднання пропорційне відношенню біноміальних коефіцієнтів. Наприклад, при двох трансформаторах – 1:2:1, при трьох – 1:3:3:1 і так далі.

Не звертаючись до відносно складної теорії таких ступінчастих переходів між двома лініями, це можна просто зрозуміти, розглядаючи два трансформатори (рис. 4.6,а) як поєднання в одній конструкції двох окремих чвертьхвильових трансформаторів, зсунутих на відстань  $\lambda/4$ . Відповідно половина амплітуди хвилі, відбитої від другого з'єднання, гаситься відбитою хвилею від першого, а половина – від третього з'єднання. Так само тритрансформаторний перехід з відношенням відбитих амплітуд 1:3:3:1 (рис. 4.6,б) можна уявити як поєднання двох попередніх переходів з відношенням 1:2:1, зсунутих також на  $\lambda/4$ . Продовжуючи цей принцип на випадок  $n$ -трансформаторного з'єднання, неважко зрозуміти, що відношення амплітуд хвиль, відбитих від окремих місць з'єднань, повинно бути таким самим, як відношення коефіцієнтів розкладу бінома  $(a+\epsilon)^n$ .

Подібні принципи можуть бути використані в оптиці для створення багат шарових невідбиваючих плівок для оптичних лінз. Певні труднощі тут пов'язані лише з підбором речовини для окремих шарів, котрі мали б точно підібрані значення діелектричної проникності.

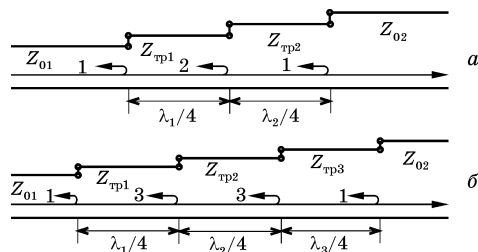


Рис. 4.6. З'єднання довгих ліній двома (а) та трьома (б) чвертьхвильовими трансформаторами. Цифри позначають відносні значення амплітуд хвиль, відбитих від окремих місць з'єднань.

Розглянемо ще один приклад багат шарової структури. Нехай у повітрі з хвильовим опором  $Z_{c0}$  розміщено декілька пар шарів з хвильовими опорами  $Z_{c1}$  та  $Z_{c2}$ , що чергуються (рис. 4.7), і товщина кожного шару дорівнює чверті довжини хвилі у відповідному середовищі. Трансформуючи опір  $Z_{c0}$  спочатку через чвертьхвильовий відрізок з опором  $Z_{c2}$  згідно (4.11), матимемо  $Z_{c0}' = Z_{c2}^2/Z_{c0}$ , а потім перераховуючи  $Z_{c0}'$  через відрізок довжиною  $\lambda_2/4$  з опором  $Z_{c1}$ , отримаємо  $Z_{c0}'' = Z_{c1}^2/Z_{c0}' = (Z_{c1}/Z_{c2})^2 Z_{c0}$ . Продовжуючи цю процедуру, можна уявити всю багат шарову структуру (рис. 4.7,в) як деяке еквівалентне середовище з хвильовим опором

$$Z_{c0}^{екв} = (Z_{c1}/Z_{c2})^{2n} Z_{c0}, \quad (4.14)$$

де  $n$  – кількість пар шарів у структурі. У такому разі коефіцієнт відбивання хвилі, що падає на  $n$ -шарову структуру, дорівнює

$$\rho = \frac{Z_{c0}^{екв} - Z_{c0}}{Z_{c0}^{екв} + Z_{c0}} = \frac{(Z_{c1}/Z_{c2})^{2n} - 1}{(Z_{c1}/Z_{c2})^{2n} + 1}. \quad (4.15)$$

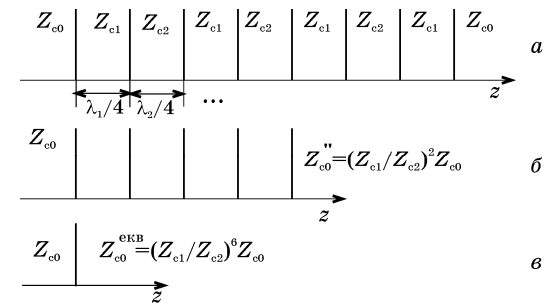


Рис. 4.7. Багат шарова структура з чвертьхвильових плівок, що чергуються (а), трансформування опору другого напівнескінченного середовища через одну пару шарів (б) та через всю багат шарову структуру (в).

З цього виразу видно, що при різних речовинах шарів незалежно від співвідношення  $Z_{c1}/Z_{c2}$  модуль коефіцієнта відбивання прямує до 1 при збільшенні кількості шарів. Якщо, наприклад, діелектрична проникність шарів відрізняється у 4 рази, то  $Z_{c1}/Z_{c2} = 2$  і коефіцієнт відбивання дорівнює 0,6 при  $n = 1$ ; 0,88 при  $n = 2$ ; 0,97 при  $n = 3$  і т.д. Тобто якісна дзеркальна поверхня може бути не тільки металевою, її можна виготовити з діелектричних плівок, що чергуються. З простої фізичної точки зору це пояснюється тим, що коефіцієнти відбивання від сусідніх границь будуть рівні за модулем та різні за знаком. Додатковий зсув фази на  $180^\circ$  забезпечується різницею ходу двічі по  $\lambda/4$  на товщині кожного шару “туди й назад”. Таким чином усі відбиті хвилі будуть синфазними і їх амплітуди сумуються.

Таку інтерференцію відбитих хвиль часто використовують для створення ефективного режиму короткого замикання у лініях передачі. На рис. 4.8 зображено конструкцію на основі коаксіальної лінії, що має два потовщення центрального провідника довжиною по  $\lambda/4$  з такою ж відстанню між ними. За своїми властивостями ця конструкція подібна багат шаровій структурі, що розглянута вище, при  $n = 2$  та замініть  $Z_{c0}$  та  $Z_{c2}$  на  $Z_0$ , а  $Z_{c1}$  на  $Z_{01}$ . Якщо вибрати конкретні розміри лінії, наприклад,  $D = 17,5$  мм,  $d = 5$  мм,  $d_1 = 16,5$  мм, то за формулою, що буде наведена у гл.5 при розгляді коаксіального хвильоводу, можна розрахувати хвильові опори основної коаксіальної лінії  $Z_0 = 75$  Ом та чвертьхвильових відрізків лінії з потовщенням

внутрішнім провідником  $Z_{01} = 3,5$  Ом. Трансформуючи опір  $Z_0$  з перерізу 4 послідовно через чвертьхвильові відрізки до перерізу 1, отримуємо, що вся конструкція являє собою для основної коаксіальної лінії деяке еквівалентне навантаження з опором  $Z_n^{екв} = (Z_{01}/Z_0)^4 Z_0$ . Цей вираз збігається з (4.14) з точністю до позначень при  $n = 2$ . Для заданих розмірів і відповідних хвильових опорів  $Z_n^{екв} = 3,5 \cdot 10^{-4}$  Ом. Таке навантаження забезпечує коефіцієнт відбивання  $-1$  з точністю до шостого знаку, майже такий самий, як і при короткому замиканні лінії (але без омичного контакту між провідниками!).

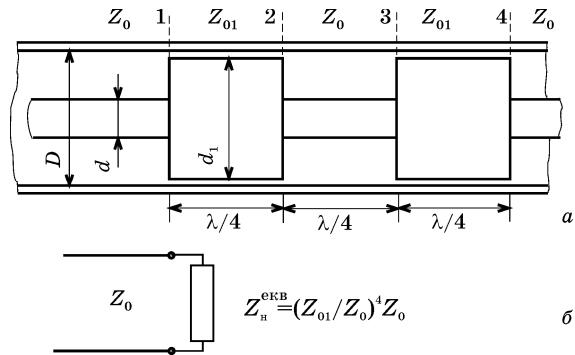


Рис. 4.8. Ступінчасте з'єднання чвертьхвильових відрізків коаксіальних ліній як короткозамикаюча структура (а) та її схемна модель у вигляді довгої лінії з еквівалентним навантаженням (б).

Слід пам'ятати, що така властивість спостерігається на тій частоті  $f_0$ , де товщини плівок (або відрізків ліній) дорівнюватимуть чверті довжини хвилі. Але на частоті, у два рази вищій, ніж  $f_0$ , така структура буде прозорою, бо плівки вже будуть півхвильовими. На частоті  $3f_0$  товщина шарів становитиме  $3\lambda/4$  і структура знову буде віддзеркалювати. Таким чином на частотній шкалі смуги відбивання хвиль чергуються зі смугами пропускання. Ці властивості є загальними для періодичних структур і широко використовуються для виготовлення різноманітних фільтруючих пристроїв у оптиці та надвисокочастотній техніці.

### 4.3 ПОХИЛЕ ПАДІННЯ ХВИЛЬ НА ГРАНИЦЮ РОЗДІЛУ

При похилому падінні електромагнітної хвилі на границю розділу двох середовищ, як і при нормальному, спостерігається відбивання та проходження хвилі у друге середовище. Однак на відміну від нормального падіння тут за певних умов можливі особливі випадки повного проходження або повного відбивання.

Одна з примітних особливостей поведінки хвиль біля границі розділу пов'язана з спрямовуючою дією поверхні. Це легко уявити з рис. 4.9,а. Перпендикулярні до поверхні потоки падаючої та відбитої хвиль спрямовані назустріч один одному і утворюють вертикальну періодичну структуру полів у вигляді *стоячих* хвиль. Сума поздовжніх складових утворює потік вздовж поверхні, що поширюється у вигляді *біжучої* хвилі. Така особливість використовується для створення хвилеводів – систем, що спрямовують поширення електромагнітних хвиль.

#### 4.3.1 Поля біля границі розділу

Для опису полів поблизу від границі розділу проведемо через вектор Пойнтінга для падаючої хвилі  $\Pi^+$  перпендикулярно до поверхні відбивання так звану площину падіння (рис. 4.9). Вона буде проходити також через вектори Пойнтінга для відбитої ( $\Pi^-$ ) та заломленої ( $\Pi^\gamma$ ) хвиль, бо у процесі відбивання перпендикулярного до неї потоку енергії не виникає. Слід зазначити, що термін “заломлена хвиля” походить з променевої оптики і використання його у хвильовій теорії виправдано лише з точки зору зміни напрямку поширення хвилі після проходження її у друге середовище.

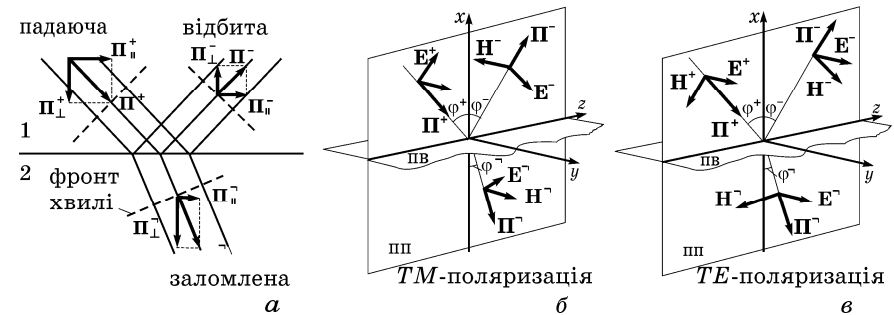


Рис. 4.9. Умовне зображення поведінки хвиль біля границі розділу двох середовищ (а), орієнтація векторів поля та вектору Пойнтінга для *ТМ*- (б) і *ТЕ*-хвиль (в) відносно площини падіння (ПП) та площини відбивання (ПВ).

Позначимо кути падіння  $\phi^+$ , відбивання  $\phi^-$  і заломлення  $\phi^\gamma$  як кути між нормаллю до границі розділу та відповідними напрямками поширення хвиль. Координатні осі зручно зв'язати з границею розділу, як вказано на рис. 4.9. У цьому випадку фаза хвильового множника (х.м.) для хвилі, що поширюється під кутом до границі розділу, не буде мати доданку, що характеризує зміну фази в  $y$ -напрямі:

$$\text{х.м.} = \exp[i(\omega t - \mathbf{kr})] = \exp[i(\omega t - k_x x - k_z z)]. \quad (4.16)$$

При похилому падінні поведінка хвилі біля границі залежить від напрямку її поляризації, тому аналіз зручно робити окремо для хвиль з різною поляризацією. Будемо називати *ТМ*-хвилею (від англ. *Transverse Magnetic Field*) випадок, коли вектор  $\mathbf{E}$  співпадає з площиною падіння, а вектор  $\mathbf{H}$  є паралельним до границі розділу (рис. 4.9,б), тобто поперечним до координати  $z$ . Іноді таку ситуацію називають *паралельною поляризацією* відповідно до розміщення вектора  $\mathbf{E}$  відносно площини падіння. Інший випадок відповідає *перпендикулярній поляризації* (рис. 4.9,в): вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярний до площини падіння, а вектор  $\mathbf{H}$  – паралельний. Його будемо називати *ТЕ*-хвилею (*Transverse Electric Field*).

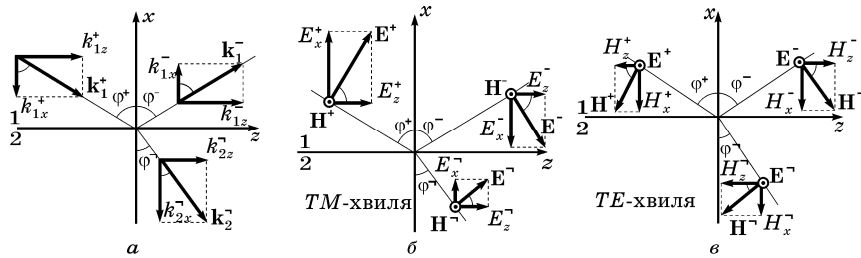


Рис. 4.10. Проекції хвильового вектора (а) та векторів поля на координатні осі: б – для *ТМ*-хвиль (вектор магнітного поля має тільки  $y$ -проекцію), в – для *ТЕ*-хвиль (вектор електричного поля має тільки  $y$ -проекцію).

Спочатку розглянемо *ТМ*-хвилі, для яких вектор електричного поля має проекції  $E_x$  та  $E_z$ , а вектор магнітного поля –  $H_y$ . Вирази для комплексних амплітуд цих складових легко отримати, проектуючи вектори  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  та  $\mathbf{k}$  на відповідні осі координат (рис. 4.10). Тоді матимемо:

для падаючої хвилі

$$\left. \begin{aligned} E_x^+ &= E^+ \sin \varphi^+ \\ E_z^+ &= E^+ \cos \varphi^+ \\ H_y^+ &= E^+ / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(k_1 x \cos \varphi^+ - k_1 z \sin \varphi^+)], \quad (4.17)$$

для відбитої хвилі

$$\left. \begin{aligned} E_x^- &= -E^- \sin \varphi^- \\ E_z^- &= E^- \cos \varphi^- \\ H_y^- &= -E^- / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(-k_1 x \cos \varphi^- - k_1 z \sin \varphi^-)], \quad (4.18)$$

для заломленої хвилі вирази відрізняються від (4.17) тільки відповідними індексами

$$\left. \begin{aligned} E_x^- &= E^- \sin \varphi^- \\ E_z^- &= E^- \cos \varphi^- \\ H_y^- &= E^- / Z_{c2} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(k_2 x \cos \varphi^- - k_2 z \sin \varphi^-)]. \quad (4.19)$$

У цих виразах для спрощення прийнято, що комплексні сталі поширення  $\gamma_{1,2}$  (3.22) включають тільки хвильові числа  $k_{1,2}$ , а сталі згасання  $\alpha_{1,2} = 0$ . Це виправдано, якщо розглядати тільки ближню до границі розділу зону, де поглинанням хвиль можна знехтувати. Подібне можна віднести і до хвильових опорів: вважатимемо їх дійсними величинами, а ті випадки, де принципово необхідно враховувати втрати і вважати їх комплексними, будуть обумовлені окремо.

Для визначення сталих інтегрування, якими є амплітуди  $E^+$ ,  $E^-$  та  $E^-$ , скористаємося граничними умовами у вигляді рівностей дотичних складових полів на поверхні розділу ( $x = 0$ ):

$$H_y^+|_{x=0} + H_y^-|_{x=0} = H_y^-|_{x=0}, \quad (4.20,а)$$

$$E_z^+|_{x=0} + E_z^-|_{x=0} = E_z^-|_{x=0}. \quad (4.20,б)$$

Підставляючи у першу граничну умову вирази для складових з (4.17) – (4.19) при  $x = 0$ , отримуємо рівність

$$\frac{E^+}{Z_{c1}} e^{-ik_1 z \sin \varphi^+} + \frac{E^-}{Z_{c1}} e^{-ik_1 z \sin \varphi^-} = \frac{E^-}{Z_{c2}} e^{-ik_2 z \sin \varphi^-}, \quad (4.21)$$

яка повинна виконуватись у довільній точці вздовж осі  $z$ . Це можливо, якщо аргументи експонент між собою рівні:

$$k_1 \sin \varphi^+ = k_1 \sin \varphi^- = k_2 \sin \varphi^-. \quad (4.22)$$

Звідси випливають два відомих закони: 1) *кут відбивання дорівнює куту падіння*

$$\varphi^- = \varphi^+, \quad (4.23)$$

2) *відношення синусів кутів падіння та заломлення обернено пропорційне відношенню хвильових чисел у відповідних середовищах:*

$$\frac{\sin \varphi^-}{\sin \varphi^+} = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}}. \quad (4.24)$$

В оптиці цей закон відомий як закон Снелля (Снелліуса), де у правій частині стоїть відношення показників заломлення  $n_1/n_2 = \sqrt{\epsilon_1} / \sqrt{\epsilon_2}$ .

При виконанні (4.22) перша гранична умова (4.21) приймає вигляд

$$\dot{E}^+ + \dot{E}^- = \dot{E}^- Z_{c1} / Z_{c2}, \quad (4.25)$$

і відповідно друга (4.20,б) з урахуванням (4.23):

$$\dot{E}^+ - \dot{E}^- = \dot{E}^- \cos \varphi^- / \cos \varphi^+. \quad (4.26)$$

Із цих двох умов можуть бути знайдені лише дві сталі інтегрування, наприклад, амплітуди відбитої та заломленої хвиль при відомій амплітуді падаючої хвилі. У такому випадку зручно їх пронормувати на  $\dot{E}^+$  і позначити  $\rho = \dot{E}^- / \dot{E}^+$ ,  $\tau = \dot{E}^- / \dot{E}^+$ , тоді

$$\begin{cases} 1 + \rho = \tau Z_{c1} / Z_{c2}, \\ 1 - \rho = \tau \cos \varphi^- / \cos \varphi^+. \end{cases} \quad (4.27)$$

Розв'язуючи цю систему відносно  $\rho$  і  $\tau$ , отримуємо так звані *формули Френеля для ТМ-хвиль*

$$\dot{\rho}_{TM} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi^- - Z_{c1} \cos \varphi^+}{Z_{c2} \cos \varphi^- + Z_{c1} \cos \varphi^+}, \quad (4.28)$$

$$\dot{\tau}_{TM} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi^+}{Z_{c2} \cos \varphi^- + Z_{c1} \cos \varphi^+}, \quad (4.29)$$

які дозволяють визначати ступінь відбивання та проходження електромагнітних хвиль при відомих параметрах середовищ і заданому куті падіння.

Необхідно зазначити, що вирази (4.28) і (4.29) у граничному випадку  $\varphi^+ = 0$  дають значення, які співпадають з коефіцієнтами відбивання та проходження за формулою (4.4) при нормальному падінні.

Для ТЕ-хвиль подібний аналіз треба проводити окремо. Як видно з рис. 4.10,в, у цьому випадку вектор  $\mathbf{E}$  має тільки одну складову  $E_y$ , а вектор  $\mathbf{H}$  дві  $-H_x$  та  $H_z$ , причому *для падаючої хвилі:*

$$\left. \begin{aligned} E_y^+ &= E^+ \\ H_x^+ &= -E^+ \sin \varphi^+ / Z_{c1} \\ H_z^+ &= -E^+ \cos \varphi^+ / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(k_1 x \cos \varphi^+ - k_1 z \sin \varphi^+)], \quad (4.30)$$

*для відбитої хвилі:*

$$\left. \begin{aligned} E_y^- &= E^- \\ H_x^- &= -E^- \sin \varphi^- / Z_{c1} \\ H_z^- &= E^- \cos \varphi^- / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(-k_1 x \cos \varphi^- - k_1 z \sin \varphi^-)] \quad (4.31)$$

*і для заломленої хвилі:*

$$\left. \begin{aligned} E_y^- &= E^- \\ H_x^- &= -E^- \sin \varphi^- / Z_{c1} \\ H_z^- &= -E^- \cos \varphi^- / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(k_2 x \cos \varphi^- - k_2 z \sin \varphi^-)]. \quad (4.32)$$

Тут, як і для ТМ-хвиль, сталі інтегрування можуть бути знайдені з граничних умов, аналогічних (4.20). Після відповідних перетворень закони відбивання (4.23) та заломлення (4.24) залишаться такими самими, а формули Френеля для ТЕ-хвиль матимуть вигляд:

$$\dot{\rho}_{TE} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi^+ - Z_{c1} \cos \varphi^-}{Z_{c2} \cos \varphi^+ + Z_{c1} \cos \varphi^-}, \quad (4.33)$$

$$\dot{\tau}_{TE} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi^+}{Z_{c2} \cos \varphi^+ + Z_{c1} \cos \varphi^-}. \quad (4.34)$$

Ці формули при  $\varphi^+ = 0$  дають ті ж співвідношення, що і при нормальному падінні, бо тут коефіцієнти відбивання та проходження визначені через відношення співнапрямлених векторів електричного поля.

В отриманих виразах слід звернути увагу на дві обставини. Перша пов'язана з тим, що проекції хвильових векторів у обох середовищах на границю розділу рівні між собою (4.22):

$$k_1 \sin \varphi^\pm = k_2 \sin \varphi^- \equiv K. \quad (4.35)$$

Це означає, що вирази для всіх складових поля мають спільний хвильовий множник  $\exp[i(\omega t - Kz)]$ , який описує хвильовий процес, що поширюється вздовж границі розділу з сталою поширення  $K \leq k_{1,2}$  і відповідно з довжиною хвилі вздовж границі  $\Lambda = 2\pi/K \geq 2\pi/k_{1,2} = \lambda_{1,2}$ . Тому і фазова швидкість цього процесу  $v_\phi = \omega/K$  вздовж границі буде більшою за швидкість  $\omega/k_{1,2}$



у напрямку поширення в обох середовищах, або, як кажуть, у вільному середовищі.

Друга характерна особливість пов'язана з відміною формул Френеля для  $TE$ - і  $TM$ -хвиль. Тому й поведінка хвиль з різною поляризацією біля границі розділу середовищ, як це побачимо у наступних прикладах, може бути різною.

### 4.3.2 Повне проходження хвилі через границю, кут Брюстера

Формули Френеля для коефіцієнтів відбивання мають у чисельнику різницю, тому природнім є питання, чи можна здійснити фізичні умови, за яких відбита хвиля відсутня ( $\rho = 0$ ). Розглянемо ці умови спочатку для  $TM$ -хвиль. Рівність доданків у чисельнику (4.28) подамо у вигляді  $Z_{c1}^2 \cos^2 \varphi^+ = Z_{c2}^2 \cos^2 \varphi^-$ , де замінимо  $\cos^2 \varphi^+ = 1 - \sin^2 \varphi^+$  і з урахуванням закону заломлення  $\cos^2 \varphi^- = 1 - \sin^2 \varphi^- = 1 - (k_1/k_2)^2 \sin^2 \varphi^+$ . Розв'язуючи останню рівність відносно  $\sin^2 \varphi^+$ , отримаємо умову, за якої відбивання від границі розділу відсутнє:

$$\sin^2 \varphi^+ = \frac{1 - (Z_{c2}/Z_{c1})^2}{1 - (k_1 Z_{c2}/k_2 Z_{c1})^2} = \frac{1 - \mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2}{1 - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2}. \quad (4.36)$$

Саме при такому значенні кута падіння, що залежить від параметрів середовищ, спостерігається повне проходження хвилі у друге середовище. Ці параметри повинні задовольняти умові  $1 \geq (1 - \mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2) / [1 - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2] \geq 0$ . Звідси видно, що дана умова нездійсненна при однакових діелектричних проникностях середовищ. Характерним є випадок двох різних діелектричних середовищ з  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  та  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Тоді з (4.36)  $\sin^2 \varphi^+ = 1 / (1 + \varepsilon_1 / \varepsilon_2)$ , або враховуючи, що  $\sin^2 \varphi \equiv 1 / (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi)$ , отримаємо

$$\varphi^+ = \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}. \quad (4.37)$$

Аналогічно, привівнюючи нулю чисельник (4.33), можна отримати умову повного проходження  $TE$ -хвилі через границю у вигляді:

$$\sin^2 \varphi^+ = \frac{1 - (Z_{c1}/Z_{c2})^2}{1 - (k_1 Z_{c1}/k_2 Z_{c2})^2} = \frac{1 - \mu_1 \varepsilon_2 / \mu_2 \varepsilon_1}{1 - (\mu_1 / \mu_2)^2}. \quad (4.38)$$

На відміну від (4.36) дана умова може бути виконана лише для речовин з різною магнітною проникністю. Якщо  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  то звідси можна отримати, що  $TE$ -хвиля не відбивається від границі розділу при

$$\varphi^+ = \operatorname{arctg} \sqrt{\mu_2 / \mu_1}. \quad (4.39)$$

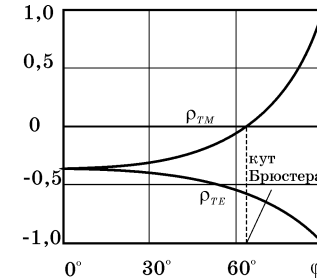


Рис. 4.11. Залежність коефіцієнтів відбивання хвиль різної поляризації від кута падіння на границю розділу повітря-скло ( $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 4$ ).

На рис. 4.11 зображено розраховані за формулами (4.28) та (4.33) залежності коефіцієнтів відбивання від кута падіння. Їх вигляд суттєво відрізняється для хвиль різної поляризації. Тому при падінні на поверхню розділу, наприклад, діелектричних середовищ електромагнітної хвилі зі змішаною поляризацією під кутом, що визначається (4.37),  $TM$ -складова хвилі повністю проходить у друге середовище.

Відбита хвиля міститиме тільки  $TE$ -складову і поляризується таким чином, що вектор  $\mathbf{E}$  буде паралельним до границі розділу. Це явище відоме в оптиці як *закон Брюстера*, а значення кута падіння (4.37) зветься *кутом Брюстера*.

Для сонячного світла властива спонтанна поляризація квантів, і при освітленні ним діелектричної поверхні під таким кутом відбите світло буде горизонтально поляризованим. Подібне спостерігається також для хвилі, що лінійно поляризована під деяким кутом до площини падіння. При кутах падіння, більших за кут Брюстера, через різні фази коефіцієнтів відбивання для  $TE$ - і  $TM$ -хвиль відбита хвиля стає еліптично поляризованою.

Фізичне пояснення такій поведінці електромагнітних хвиль пов'язане з особливостями поглинання та перевипромінювання хвиль електронами кристалічної ґратки твердого тіла, але це знаходиться поза межами класичної макроскопічної теорії поля.

### 4.3.3 Повне внутрішнє відбивання

Ще одна цікава ситуація спостерігається, коли  $k_1 > k_2$ , або, як іноді кажуть в оптиці, коли перше середовище має більшу оптичну густину. У цьому разі кут заломлення більший за кут падіння і досягає значення у  $90^\circ$  вже при  $\varphi^+ < 90^\circ$ . Наприклад, якщо електромагнітна хвиля падає з боку скла ( $\varepsilon_1 = 4$ ) на границю його з повітрям ( $\varepsilon_2 = 1$ ), то з (4.24) витікає, що  $\sin \varphi^- = 1$  ( $\varphi^- = 90^\circ$ ) при  $\sin \varphi^+ = 1/2$  ( $\varphi^+ = 30^\circ$ ) і хвиля у другому середовищі поширюється вздовж границі розділу. Тобто, при виконанні умови

$$\varphi^+ \geq \arcsin(k_2 / k_1) = \arcsin \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 / \varepsilon_1 \mu_1} \quad (4.40)$$

дійсне значення кута заломлення відсутнє і відповідно не існує хвилі, що проходить у друге середовище. Це і є умовою *повного внутрішнього відбивання*.

Щоб це довести, зазначимо, що  $\cos\varphi^- = \sqrt{1 - \sin^2\varphi^-} = \sqrt{1 - (k_1/k_2)^2 \sin^2\varphi^+}$ . При кутах падіння, більших за (4.40), вираз під коренем стає від'ємним і значення косинуса стає уявним:

$$\cos\varphi^- = i\sqrt{(k_1/k_2)^2 \sin^2\varphi^+ - 1} = \pm i|\cos\varphi^-|. \quad (4.41)$$

У такому разі формули (4.28) та (4.33) для коефіцієнта відбивання матимуть у чисельнику та знаменнику комплексно спряжені вирази, модулі яких мають однакові значення. Тому, наприклад, для *ТМ*-хвиль

$$\dot{\rho}_{TM} = -\frac{Z_{c1} \cos\varphi^+ \mp iZ_{c2} |\cos\varphi^-|}{Z_{c1} \cos\varphi^+ \pm iZ_{c2} |\cos\varphi^-|} = 1 \cdot e^{i2\psi_0}, \quad (4.42)$$

і відбивання буде повним, бо  $|\dot{\rho}| = 1$  незалежно від степені нерівності (4.40). Від цього залежить зсув фази відбивання, який тут зручно позначити як  $2\psi_0$ .

Уявлення про структуру поля над поверхнею повного внутрішнього відбивання можна отримати, додаючи вирази для однойменних проекцій поля падаючої та відбитої хвиль при  $\dot{E}^- = \dot{E}^+ e^{i2\psi_0}$ . Наприклад, підсумовуючи вирази (4.17) та (4.18) для проекцій комплексних амплітуд, отримаємо для *ТМ*-хвиль при  $k_{1x} = k_1 \cos\varphi^+$ :

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= i2E^+ \sin\varphi^+ \sin(k_{1x}x - \psi_0) e^{-i(Kz - \psi_0)}, \\ \dot{E}_z &= 2E^+ \cos\varphi^+ \cos(k_{1x}x - \psi_0) e^{-i(Kz - \psi_0)}, \\ \dot{H}_y &= i2(E^+/Z_{c1}) \sin(k_{1x}x - \psi_0) e^{-i(Kz - \psi_0)}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Домножуючи ці вирази на часовий множник  $e^{i\omega t}$  та залишаючи тільки дійсну частину, перейдемо від комплексних амплітуд до дійсних миттєвих значень

$$\begin{aligned} E_x &= -2E_m^+ \sin\varphi^+ \sin(k_{1x}x - \psi_0) \sin(\omega t - Kz + \psi_0), \\ E_z &= 2E_m^+ \cos\varphi^+ \cos(k_{1x}x - \psi_0) \cos(\omega t - Kz + \psi_0), \\ H_y &= -2(E_m^+/Z_{c1}) \sin(k_{1x}x - \psi_0) \sin(\omega t - Kz + \psi_0). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Якщо подібні перетворення провести з виразами (4.30) та (4.31), для миттєвих значень проекцій полів *ТЕ*-хвиль матимемо

$$\begin{aligned} E_y &= 2E_m^+ \cos(k_{1x}x - \psi_0) \cos(\omega t - Kz + \psi_0), \\ H_x &= -2(E_m^+/Z_{c1}) \sin\varphi^+ \cos(k_{1x}x - \psi_0) \cos(\omega t - Kz + \psi_0), \\ H_z &= 2(E_m^+/Z_{c1}) \cos\varphi^+ \sin(k_{1x}x - \psi_0) \sin(\omega t - Kz + \psi_0). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Головна особливість полів над поверхнею повного внутрішнього відбивання впливає з наявності у виразах (4.44) та (4.45) хвильових множників у вигляді  $\sin(\omega t - Kz + \psi_0)$  або  $\cos(\omega t - Kz + \psi_0)$ . Ці вирази описують хвильовий процес, що поширюється вздовж координати  $z$ , тобто паралельно поверхні відбивання, з сталою поширення  $K = k_1 \sin\varphi^+$  і з фазовою швидкістю  $v_\phi = \omega/K = c_1/\sin\varphi^+$  та довжиною хвилі  $\Lambda = 2\pi/K = \lambda_1/\sin\varphi^+$ . Треба звернути увагу на те, що останні величини *більші* відповідно за швидкість світла та довжину хвилі у напрямку її падіння у першому середовищі.

Важливо також те, що амплітудна частина виразів (4.44) та (4.45) містить періодичні множники  $\sin(k_{1x}x - \psi_0)$  або  $\cos(k_{1x}x - \psi_0)$ . Це означає утворення стоячої хвилі у вертикальному напрямку, перпендикулярному до площини відбивання. На висоті, де множники приймають нульові значення, утворюються вузли, а там, де вони мають максимальні значення, амплітуди відповідних складових поля подвоюються (пучності). Зазначимо також, що проекції  $E_x$  та  $H_y$ , або  $E_y$  та  $H_x$ , поперечні до напрямку поширення, описуються однаковими функціями.

Найцікавіша особливість цього процесу полягає в тому, що електромагнітні поля існують і по той бік від поверхні внутрішнього відбивання. Це можна зрозуміти на основі виразів (4.19) та (4.32), де  $\cos\varphi^-$  приймає уявне значення (4.41). Тоді хвильовий множник матиме вигляд

$$\exp[i(\omega t \pm ik_2 x |\cos\varphi^-| - Kz)] = \exp(\mp k_2 x |\cos\varphi^-|) \exp[i(\omega t - Kz)]. \quad (4.46)$$

Процес, що описується таким виразом, являє собою хвилю, що поширюється вздовж поверхні відбивання з тим же хвильовим числом і з тією ж фазовою швидкістю, як і в першому середовищі. Але амплітуда цієї хвилі при віддаленні від поверхні (нагадаємо, що йдеться про область  $x < 0$ ) зменшується за експоненціальним законом  $\exp(k_2 |\cos\varphi^-| x)$ . Якщо друге середовище нескінченне, то фізичний зміст має тільки нижній знак у (4.46). Можна вважати, що ці поля локалізовані у приповерхневому шарі, товщина якого має порядок  $\Delta x = 1/k_2 |\cos\varphi^-|$ , і тому вони утворюють так звану *поверхневу хвилю*.

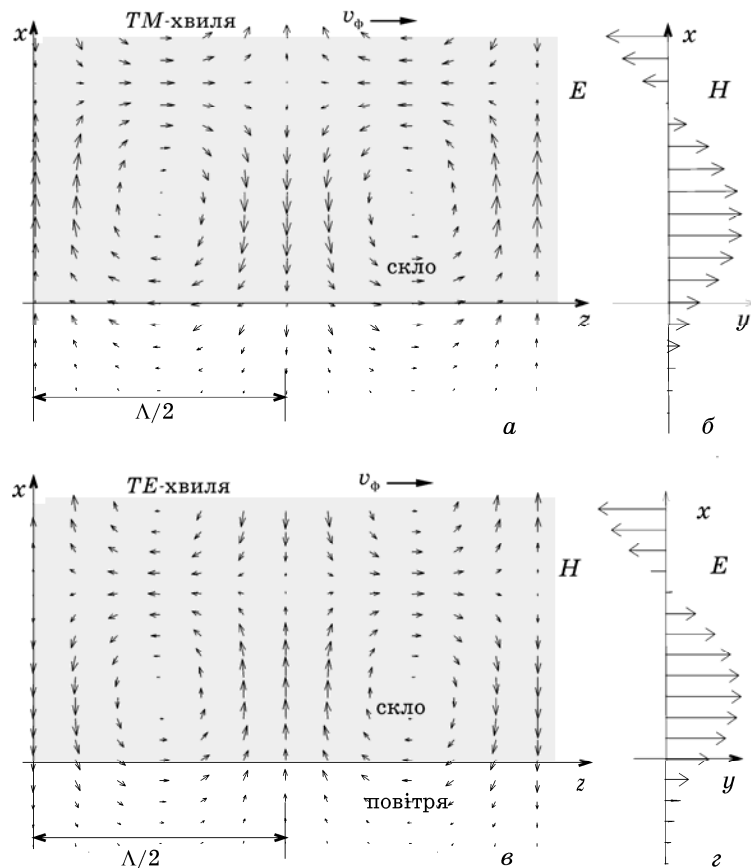


Рис. 4.12. Миттєві “фотографії” просторового розподілу векторів електричного (а) та магнітного (б) поля біля поверхні повного внутрішнього відбивання для  $TM$ -хвилі, що падає на границю розділу скло-повітря ( $\epsilon_1/\epsilon_2 = 4/1$ ) під кутом  $\varphi^+ = 60^\circ$ . Те саме для магнітного (в) і електричного (г) поля у випадку  $TE$ -хвилі. Розподіл  $y$ -складових (б,г) наведено для позначених поперечних перерізів.

Наочне уявлення про структуру полів біля поверхні повного внутрішнього відбивання можна отримати з рис. 4.12, де з допомогою векторів електричного і магнітного поля зображено структуру полів для  $TM$ - та  $TE$ -хвиль, що відповідають виразам (4.44) – (4.46) у фіксований момент часу. З часом уся картина поля переміщується вздовж поверхні з фазовою швидкістю  $v_\phi$ .

Погодити між собою явище повного відбивання від поверхні та проникнення полів у середовище за поверхнею допомагає уявлення, що хвиля відбивається не безпосередньо від границі розділу, а ніби розподілено, заходячи у другу область у вигляді деяких крайових полів (рис. 4.12), які й утворюють

поверхневу хвилю. Тоді зрозумілим стає факт проходження хвилі під тим самим кутом (падіння), якщо на деякій відстані від поверхні повного внутрішнього відбивання розмістити таке саме середовище, як і перше. При цьому амплітуда хвилі, що туди проходить, у відповідності з законом (4.46) експоненціально спадатиме із збільшенням цієї відстані.

#### 4.3.4. Відбивання від поверхні ідеального провідника

Повне відбивання електромагнітних хвиль, як і для нормального падіння, має місце, коли друге середовище є ідеально провідним ( $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $Z_{c2} = 0$ ). Коефіцієнти відбивання за формулою (4.28) або (4.33) у цьому випадку мають значення  $\rho_{TM} = 1$  та  $\rho_{TE} = -1$ .

Конфігурація полів над поверхнею подібно до випадку повного внутрішнього відбивання залежить від напрямку поляризації хвилі. Для  $TM$ -хвилі вирази для складових поля можна отримати з (4.45), поклавши в них  $\psi_0 = \pi/2$ , бо  $\rho_{TM} = 1 \cdot e^{i\pi}$  (індекс 1 при позначенні параметрів середовищ опускаємо, бо в другому середовищі електромагнітні поля відсутні):

$$\begin{aligned} E_x &= 2E_m^+ \sin \varphi^+ \cos k_x x \cos(\omega t - Kz), \\ E_z &= -2E_m^+ \cos \varphi^+ \sin k_x x \sin(\omega t - Kz), \\ H_y &= 2(E_m^+/Z_c) \cos k_x x \cos(\omega t - Kz). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Для  $TE$ -хвиль  $\rho_{TE} = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ , тому  $\psi_0 = \pi/2$  і з (4.45) матимемо:

$$\begin{aligned} E_y &= -2E_m^+ \sin k_x x \sin(\omega t - Kz), \\ H_x &= 2(E_m^+/Z_c) \sin \varphi^+ \sin k_x x \sin(\omega t - Kz), \\ H_z &= -2(E_m^+/Z_c) \cos \varphi^+ \cos k_x x \cos(\omega t - Kz). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ці вирази описують хвилю (рис. 4.13), що біжить вздовж відбиваючої поверхні у напрямі координати  $z$  із сталою поширення  $K < k$ , фазовою швидкістю  $v_\phi = \omega/K > c$  та довжиною хвилі  $\Lambda = 2\pi/K > \lambda$ . Амплітуда цих хвиль періодично залежить від відстані  $x$  над поверхнею металу, що характерно для стоячої хвилі (рис. 4.13,в). На самій поверхні ( $x = 0$ ) відповідно до граничних умов відсутні дотичні складові  $E_z$  та  $E_y$  електричного поля та нормальна проекція  $H_x$  магнітного поля. Тут розміщені вузли для тих складових, які мають множник  $\sin k_x x$ . Такі самі вузли мають місце на таких відстанях  $\Delta x$ , де  $k_x x = n\pi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), тобто

$$\Delta x = n\pi/k_x = n\pi/k \cos \varphi^+ = n\lambda/2 \cos \varphi^+ = n\lambda_x/2. \quad (4.49)$$

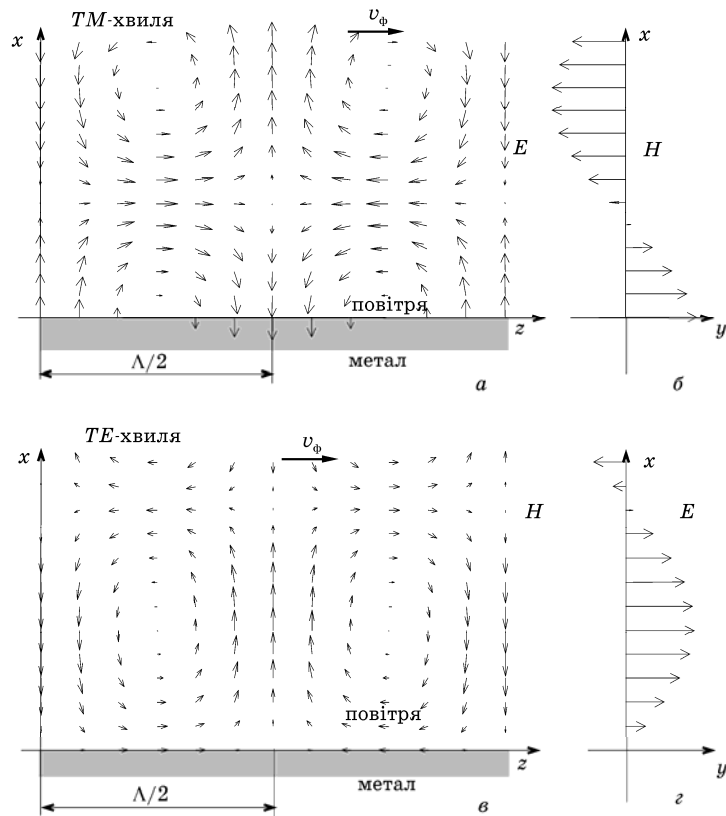


Рис. 4.13. Те саме, що й на рис. 4.12, але для повного відбивання від поверхні ідеального провідного середовища.

Посередині між вузлами у точках, де  $\sin k_x x = \pm 1$ , розміщені пучності для цих складових і їх амплітуди подвоюються. Нормальна складова електричного поля  $E_x$  та паралельні складові магнітного поля  $H_y$  та  $H_z$ , вирази для яких містять множник  $\cos k_x x$ , у цих же точках мають вузли. Для такої структури поля місцями рівних амплітуд є площини  $x = \text{const}$ , а місцями рівних фаз  $-z = \text{const}$ . Подібні хвилі називають *неоднорідними*, на відміну від плоскої хвилі, яка є однорідною.

Дуже корисним є уявлення про неоднорідну хвилю як суперпозицію двох плоских однорідних хвиль. Це ясно, по-перше, з того, що формально вирази (4.47) та (4.48) одержані як сума виразів (4.17), (4.18) і відповідно (4.30), (4.31). По-друге, це можна показати на прикладі *TE*-хвилі, зображуючи падаючу (рис. 4.14,а) та відбиту (рис. 4.14,б) хвилі з допомогою плоских фронтів, що чергуються. Причому суцільні та штрихові лінії відповідають таким місцям, де напруженості поля максимальні і вектори поля мають протилежні напрями. Суперпозицію цих

рисунків треба зробити так (рис. 4.14,в), щоб на поверхні металу виконувались відповідні граничні умови: дотичні складові

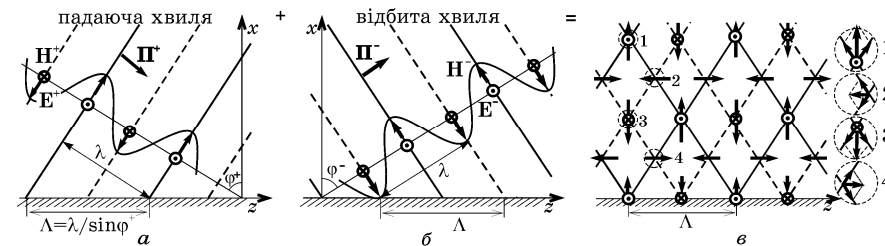


Рис. 4.14. Умовне зображення плоских *TM*-хвиль: падаючої (а), відбитої (б) та їх суперпозиції (в). Точки 1 – 4 відповідають характерним місцям перетину фронтів і напрямам електричного і магнітного полів (порівняти з рис. 4.13,а).

електричного поля повинні бути протилежними, а магнітного – співпадаючими. Складаючи вектори полів для падаючої та відбитої хвиль у характерних точках перетину фронтів матимемо, що їх напрям відповідає рис. 4.13, який побудовано на основі виразів (4.48). Неважко також уявити, що з часом фронти падаючої хвилі переміщуються вправо-вниз (у напрямку падіння), відбитої – вправо-вгору, а їх суперпозиція – тільки вправо, вздовж поверхні відбивання. Просторовий період, тобто довжина цієї хвилі, і відповідно швидкість у напрямку поширення, як видно з рис. 4.14, більші за довжину хвилі і швидкість у вільному просторі (у напрямку падіння або відбивання):

$$\Lambda = \lambda / \sin \varphi^+, \quad v_\phi = c / \sin \varphi^+, \quad (4.50)$$

що відповідає формальному співвідношенню (4.36).

Таке уявлення дозволяє створити деяку модель, дуже корисну для розуміння процесів у хвилеводах. Поставимо питання, чи можна у просторі, де поширюється неоднорідна хвиля, розмістити ідеально провідну площину так, щоб не порушити структуру електромагнітної хвилі. Це можна зробити у тих місцях, де виконуватимуться такі самі граничні умови, як і на відбиваючій поверхні. Враховуючи періодичність структури поля у перпендикулярному до поверхні напрямку, таку площину можна розмістити паралельно поверхні на відстані  $d$ , кратній півперіоду стоячої хвилі

$$d = n\lambda/2 \cos \varphi^+, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.51)$$

На відміну від (4.49) тут у переліку цілих чисел, як побачимо далі, може мати місце нульове значення. У результаті матимемо дві відбиваючі поверхні, які й утворюють так званий

“площинний хвилевод”. Між ними можуть розповсюджуватись електромагнітні хвилі з структурами  $TE$ - або  $TM$ -хвиль, які мають вигляд відповідно до рис. 4.13, якщо не звертати увагу на поля над верхньою площиною. Ці хвилі можна уявити як плоску хвилю, що, відбиваючись по чергово від площин, просувається вздовж хвилеводу. Кут падіння згідно з (4.51) залежить від співвідношення між довжиною хвилі і відстанню  $d$ .

Одним з найважливіших висновків є те, що у такому хвилеводі можуть розповсюджуватись хвилі з різноманітними конфігураціями полів, або, як їх називають, *моди*. Формально вони відрізняються номером  $n$  і позначаються  $TE_n$  або  $TM_n$ . Фізичний зміст номера моди пов'язують з кількістю півперіодів картини розподілу поля, що розміщується між площинами.

**Приклад 4.1.** Які моди можуть існувати між двома металевими поверхнями з відстанню  $d = 2$  см на частоті 30 ГГц?

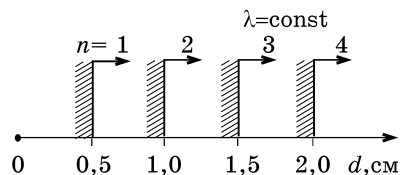


Рис. 4.15. Діаграма для ілюстрації умов поширення тих чи інших мод у “площинному” хвилеводі для заданої довжини хвилі  $\lambda = 1$  см.

Перш за все, виходячи з фізично можливих значень кута падіння, зазначимо, що  $0 < \cos\phi^+ < 1$  і кожній моді властива деяка мінімальна відстань  $d_{n\min} = n\lambda/2$ , така, що при  $d < d_{n\min}$  поширення даної моди неможливе. Позначимо на числовій осі  $d$  (рис. 4.15) величини  $d_{n\min}$  для різних мод, починаючи з  $n = 1$ , при довжині падаючої хвилі  $\lambda = c/f = 1$  см ( $d_{1\min} = 0,5$  см,  $d_{2\min} = 1$  см,  $d_{3\min} = 1,5$  см,  $d_{4\min} = 2$  см,...). На цій же діаграмі символом стрілки вправо відмітимо область значень  $d$ , за яких дана мода може існувати у такому хвилеводі. З неї видно, що при заданій відстані 2 см умова поширення моди ( $d > d_{n\min}$ ) виконуватиметься тільки для перших трьох мод при кутах падіння  $\phi^+ = \arccos(d_{n\min}/d)$ , тобто  $76^\circ$ ,  $60^\circ$  та  $41^\circ$  відповідно.

На рис. 4.16 зображено конфігурацію полів для перших трьох  $TM$ - та  $TE$ -мод згідно з рис. 4.13. Кожна мода має своє значення довжини хвилі у хвилеводі  $\Lambda = \lambda/\sin\phi^+$ , тобто 1,03, 1,15 та 1,52 см відповідно. Для четвертої моди спостерігається критична ситуація, коли  $d = d_{4\min}$ ,  $\phi^+ = 0^\circ$ , а довжина хвилі та фазова швидкість вздовж хвилевода – нескінченно великі.

Таким чином, з наведеного прикладу ясно, що за конкретних умов (довжина хвилі, відстань) у хвилеводі може існувати *фіксоване число мод*, для яких виконується умова  $d > n\lambda/2$ . Це – з деяких причин небажане явище, і у більшості практичних випадків намагаються забезпечити умови для поширення тільки однієї моди, або так званий *одномодовий режим*.

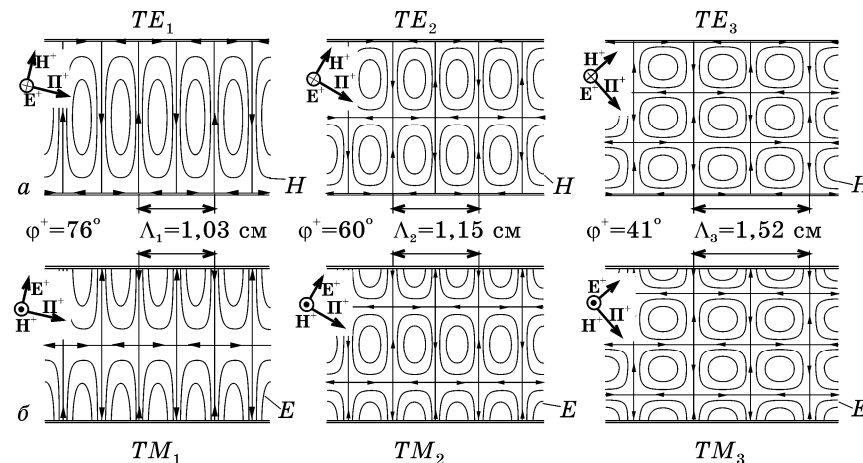


Рис. 4.16. Розподіл електричного поля для перших трьох  $TM$ -мод (а) та магнітного (б) для  $TE$ -мод у “площинному” хвилеводі при довжині падаючої хвилі 1 см та відстані між площинами 2 см. Кожній моді відповідає своє значення кута падіння та довжини хвилі у хвилеводі.

**Приклад 4.2.** Для хвилеводу з відстанню між металевими пластинами  $d = 2$  см визначити умови, за яких поширюватимуться хвилі у вигляді тільки однієї моди.

Виходячи з виразу (4.51) та можливих значень  $\cos\phi^+$ , запишемо умову поширення тієї чи іншої моди у вигляді  $\lambda < 2d/n$ . Величину  $2d/n$  природньо вважати деяким граничним значенням в умові поширення і її називають *критичною довжиною хвилі*  $\lambda_{\text{кр}}$ . На числовій осі довжин хвиль (рис. 4.17) відкладемо значення  $\lambda_{\text{кр}}$  для декількох перших мод ( $\lambda_{1\text{кр}} = 4$  см,  $\lambda_{2\text{кр}} = 2$  см,  $\lambda_{3\text{кр}} = 1,33$  см,  $\lambda_{4\text{кр}} = 1$  см). У цих же точках поставимо такі ж символи, як і на рис. 4.15, – стрілки для позначення області  $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$ , де  $n$ -мода може поширюватися, та штрихування в області  $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ , де вона не може існувати.

З цієї діаграми ясно, що поширення *тільки однієї* моди можливе, якщо хвилевод збуджувати хвилею з довжиною  $\lambda_{1\text{кр}} > \lambda > \lambda_{2\text{кр}}$ , тобто від 2 см до 4 см, або на частоті від 7,5 ГГц до 15 ГГц. У цьому діапазоні виконуватиметься умова поширення тільки

першої моди, яку звать *основною*, а для всіх інших, або *вищих*, хвильовод буде занадто вузьким ( $\lambda > 2d/n$ ). Треба також пам'ятати, що кожній довжині хвилі відповідатиме певний кут падіння (рис.4.17,б), значення якого можна визначити з (4.51) –  $\cos\varphi^+ = \lambda/\lambda_{кр}$ , та відповідна довжина хвилі  $\Lambda$  і фазова швидкість (4.50):

$$v_{tm} = c/\sin\varphi^+ = c/\sqrt{1 - \cos^2\varphi^+} = c/\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}. \quad (4.52)$$

Це співвідношення показує (рис. 4.17,б) залежність фазової швидкості від довжини хвилі (частоти) та визначає закон дисперсії, як побачимо далі, не тільки для розглянутої моделі “площинного” хвильоводу, а й для багатьох реальних хвильоводів.

Поза увагою нашого розгляду залишилось нульове значення числа  $n$  у (4.51). На перший погляд йому відповідає нереальне значення  $d = 0$ . Виявляється, що можливе існування хвилі з  $n = 0$  при довільному  $d$ , але за умови поширення плоскої електромагнітної хвилі паралельно провідним площинам, коли  $\cos\varphi^+ = 0$ .

Крім того, необхідно, щоб відповідно до граничних умов на поверхні ідеального металу силові лінії електричного поля були перпендикулярними до площин, а магнітного – паралельними. Цій вимозі задовольняє лише хвиля з поляризацією, що була названа *TE*, при  $\varphi^+ = 90^\circ$  (рис. 4.18). Але у цьому разі і електричні і магнітні силові лінії є тільки поперечними до напрямку поширення, тому для такої моди використовують позначення – *TEM*. Характерною особливістю *TEM*-моди є співпадання параметрів хвилі у хвильоводі і вільному просторі ( $v_\phi = c$ ,  $\Lambda = \lambda$ ), бо  $\sin\varphi^+ = 1$  і  $\lambda_{кр} \rightarrow \infty$  незалежно від частоти. Це означає, що *TEM*-моді властива відсутність дисперсії.

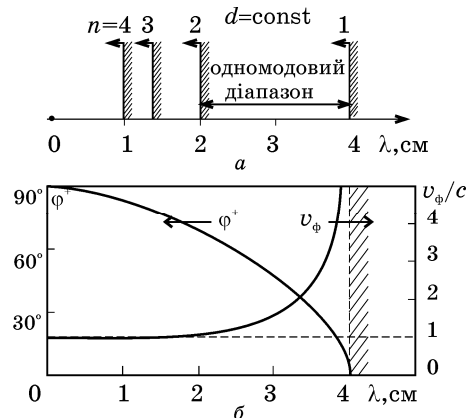


Рис. 4.17. Діаграма (а), що ілюструє умови поширення різних мод у “площинному” хвильоводі з заданою відстанню  $d = 2$  см. Перша мода може існувати без домішок інших у діапазоні довжин хвилі від 2 до 4 см. Залежність (б) фазової швидкості та кута падіння від довжини хвилі для першої моди.

### 4.3.5. Відбивання від поверхні реальних металів

Особливості відбивання електромагнітних хвиль від поверхні реальних металів пов'язані з їх електричними параметрами: комплексним хвильовим опором  $Z_{см}$  та комплексною сталою поширення  $\dot{\gamma}_m = k_m - i\alpha_m$ .

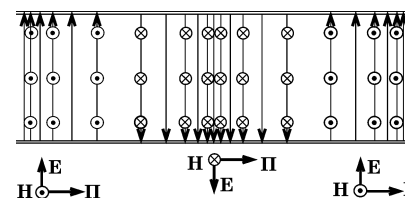


Рис. 4.18. Орієнтація векторів поля для плоскої хвилі (моди *TEM*) у “площинному” хвильоводі.

#### Приклад 4.3.

Визначити коефіцієнт відбивання хвилі з частотою  $f = 10$  ГГц від поверхні міді з  $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$  СМ/м.

Подамо хвильовий опір міді через параметр  $Z_{c0} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  для вакууму, враховуючи, що для металів  $\text{tg}\delta = \sigma/\omega\epsilon_0 \gg 1$ . Тоді

$$\dot{Z}_{см} = \sqrt{\mu\mu_0/\epsilon\epsilon_0(1 - i \text{tg}\delta)} \approx (1 + i)Z_{c0}\sqrt{\omega\mu\epsilon_0/2\sigma}. \quad (4.53)$$

Оскільки  $\omega = 2\pi f$  і для міді  $\mu \approx 1$ , після підстановки числових значень у (4.53) отримаємо, що  $\sqrt{\omega\mu\epsilon_0/2\sigma} \approx 6,9 \cdot 10^{-5}$ . Коефіцієнт відбивання при нормальному падінні хвилі з боку повітря (вакууму) на поверхню міді за формулою (4.4) дорівнює  $\rho = [(1+i)6,9 \cdot 10^{-5} - 1]/[(1+i)6,9 \cdot 10^{-5} + 1] \approx -0,9998$ . Для хвиль оптичного діапазону, тобто на частотах порядку  $10^{15}$  Гц, він буде відрізнятися від  $-1$  у другому знаку.

Із скінченної провідності металів впливає перша особливість – не вся енергія падаючої електромагнітної хвилі відбивається, як від поверхні ідеального провідника, деяка частина її проходить у метал і там поглинається, перетворюючись у теплову. В електронній техніці звичайно використовують метали з високою провідністю і для багатьох практичних випадків, як видно з наведеного прикладу, відбивання можна вважати повним, з таким саме розподілом полів над поверхнею, як і для ідеального провідника. Неідеальність звичайно треба брати до уваги, коли необхідно розрахувати втрати енергії у металевих провідниках.

**Приклад 4.4.** Визначити кут заломлення хвилі, що проходить, при відомому куті падіння для тих самих даних, що й у попередньому прикладі.

Подамо сталу поширення хвилі  $\dot{\gamma}_m = k_m - i\alpha_m$  у металі через хвильове число  $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  для вакууму, враховуючи, що для металів  $\text{tg}\delta = \sigma/\omega\varepsilon\varepsilon_0 \gg 1$

$$\dot{\gamma}_m = \omega\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0(1 - i\text{tg}\delta)} \approx (1 - i)k\sqrt{\sigma\mu/2\omega\varepsilon_0}. \quad (4.54)$$

Порівнюючи значення хвильових чисел у металі (дійсна частина  $\dot{\gamma}_m$ ) та у вакуумі, бачимо, що відношення  $k_m/k$  дорівнює  $\sqrt{\sigma\mu/2\omega\varepsilon_0}$ , що для міді на частоті 10 ГГц становить  $0,7 \cdot 10^4$ . Скориставшись законом заломлення (4.24), маємо  $\sin\varphi^- = \sin\varphi^+/0,7 \cdot 10^4$  і  $\varphi^- \approx 0$  навіть при  $\sin\varphi^+ = 1$ .

Розглянутий приклад ілюструє ще одну важливу особливість поведінки електромагнітних хвиль біля поверхні реальних металів: практично незалежно від кута падіння хвилі, що пройшла у метал, поширюється *перпендикулярно* до його поверхні. Відповідно у цьому ж напрямі через поверхню існує потік енергії у метал, який задається вектором Пойнтінга  $\Pi_n$  (рис. 4.19,а). Цей потік обумовлений перпендикулярними до  $\Pi_n$  та дотичними до поверхні складовими електричного та магнітного полів, що відрізняється від граничних умов на поверхні ідеального провідника (приклад 1.8). Принциповим є те, що саме скінченна провідність обумовлює наявність дотичної складової електричного поля  $E_\tau$  при протіканні струму по поверхні металу. Враховуючи, що відношення комплексних амплітуд електричного та магнітного полів дорівнює хвильовому опору  $\dot{Z}_{cm}$ , та напрямі їх векторів, можемо записати для дотичних складових:

$$\dot{E}_\tau = \dot{Z}_{cm} [\dot{H}_\tau \times \mathbf{e}_n], \quad (4.55)$$

де  $\mathbf{e}_n$  – орт нормалі до поверхні, спрямований вглиб металу (напрямок осі  $x$  на рис. 4.19 порівняно з попередніми для зручності змінено на зворотній). Тоді вектор Пойнтінга, що визначає втрати у металі, може бути знайдений через складові поля на поверхні

$$\dot{\Pi}_n = [\dot{E}_\tau \times \dot{H}_\tau^*]/2 = \dot{Z}_{cm} [[\dot{H}_\tau \times \mathbf{e}_n] \times \dot{H}_\tau^*]/2 = \mathbf{e}_n \dot{Z}_{cm} |\dot{H}_\tau|^2/2. \quad (4.56)$$

Амплітуди полів спадають вглиб металу за законом  $\exp(-\alpha_m x)$ , де  $\alpha_m = k\sqrt{\sigma\mu/2\omega\varepsilon_0} = \sqrt{\omega\sigma\mu_0/2}$  – уявна частина сталої поширення  $\dot{\gamma}_m$  (4.54), бо електричне поле викликає струми провідності і нагрівання металу. Густина струму спадає за тим самим законом (рис. 4. 19,б), що й електричне поле  $j(x) = \sigma E_\tau(x) =$

$\sigma E_\tau(0) \exp(-\alpha_m x)$ . Якщо провести інтегрування  $j(x)$  по всій товщі металу ( $0 < x < \infty$ )

$$\int_0^\infty j(x) dx = \sigma E_\tau(0) \int_0^\infty \exp(-\alpha x) dx = \sigma E_\tau(0) / \alpha_m, \quad (4.57)$$

то з останнього виразу можна уявити, що начебто весь струм розподілено рівномірно з тією ж густиною  $j(0) = \sigma E_\tau(0)$ , що й на поверхні (рис. 4.19,в), але тільки у шарі товщиною

$$\Delta = 1/\alpha_m = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}. \quad (4.58)$$

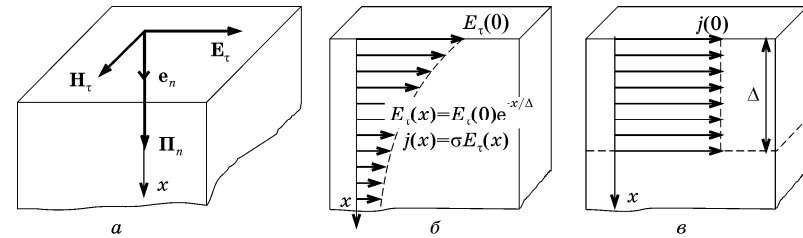


Рис. 4.19. Дотичні складові  $E_\tau$  і  $H_\tau$  на поверхні реального металу (а), обумовлені нормальним потоком енергії у метал, розподіл електричного поля та струмів провідності у товщі металу (б) та еквівалентне подання (в) приповерхневого шару. Напрямок осі  $x$  змінено на зворотній порівняно з попередніми рисунками.

Це явище розглядалось у розд. 3.3.3 як скін-ефект і в електронній техніці використовується для захисту (екранування) пристроїв від впливу зовнішніх електромагнітних полів. Для цього товщина металевого екрану повинна бути не меншою, ніж декілька  $\Delta$ . Звичайно вважають, що хвиля повністю поглинається у шарі товщиною  $(3 \dots 5)\Delta$ .

Для розрахунку потужності втрат електромагнітної енергії на нагрівання треба проінтегрувати вектор Пойнтінга  $\dot{\Pi}_n$  по поверхні металу  $S$ , що розглядається, тоді

$$P_\tau = \frac{\text{Re}}{2} \left[ \int_S \Pi_n dS \right] = \frac{\text{Re}}{2} \left[ \dot{Z}_{cm} \int_S |\dot{H}_\tau|^2 dS \right] = \frac{1}{2\sigma\Delta} \int_S |\dot{H}_\tau|^2 dS. \quad (4.59)$$

Тут враховано, по-перше, що вектор  $dS$  має напрям, співпадаючий з  $\mathbf{e}_n$ , тому  $\mathbf{e}_n dS = dS$ ; по-друге, вираз (4.53) для хвильового опору металу з використанням значення для  $\Delta$  має вигляд  $\dot{Z}_{cm} = (1 + i)/\sigma\Delta$ .

Труднощі інтегрування (4.59) викликані перш за все тим, що знаходження функцій розподілу полів на поверхні *реального*

металу є дуже важкою задачею навіть для відносно простих випадків. Для спрощення звичайно приймають так звані *наближені граничні умови Шукіна-Леонтовича*, згідно з якими вважають, що втрати в реальному металі несуттєво впливають на конфігурацію магнітного і нормальної складової електричного поля біля його поверхні, а дотична складова електричного поля може бути розрахована подібно до (4.55)

$$\dot{\mathbf{E}}_{\tau} = \dot{Z}_{\text{см}} \left[ \dot{\mathbf{H}}_{\tau}^{(0)} \times \mathbf{e}_n \right], \quad (4.60)$$

але тут використовують значення магнітного поля  $\dot{\mathbf{H}}_{\tau}^{(0)}$  на поверхні *ідеального* провідника. Відповідно при розрахунках теплових втрат в інтеграл (4.59) підставляють розподіл  $|\dot{H}_{\tau}^{(0)}|^2$ , знайдений для ідеального випадку.

На заключення звернемо увагу на один параметр, який широко використовується у практиці, – *поверхневий опір*  $R_s$ . Це є опір паралелепіпеда товщиною  $\Delta$ , верхня грань якого лежить на поверхні металу і має форму квадрата з *одиночною* стороною. Використовуючи відому формулу для опору, можна показати, що його опір  $R_s = 1/\sigma\Delta$ . Фактично, з врахуванням *скін-ефекту*, це є опором стовпчика нескінченної товщини вглиб металу з квадратною основою на поверхні з струмом, що протікає у приповерхневому шарі. Цікаво, що цей опір не залежить від розміру квадратної ділянки, бо він пропорційний довжині і обернено пропорційний ширині.