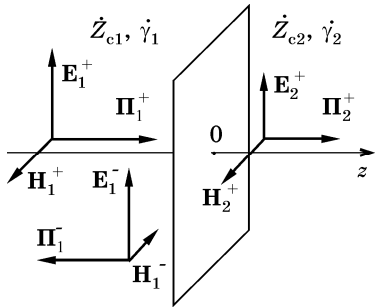


## 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ У ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

### 4.1. ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН (нормальное падение)

В бесконечной однородной среде возможно существование лишь волны, которая распространяется от источника возбуждения. Отражение наблюдается только при наличии неоднородности, изменения параметров среды. Для исследования основных закономерностей и параметров отражения рассмотрим простейшую модель отражения плоской волны от границы раздела двух сред (рис.4.1) при ее перпендикулярном падении на границу. Пусть граница раздела двух сред, отличающихся волновым сопротивлением и постоянной распространения, расположена в точке  $z = 0$ . Электромагнитная волна распространяется слева направо, испытывает частичное отражение от границы и проходит во вторую среду. Для описания полей запишем решение волнового уравнения (3.25) для обеих сред: слева от границы в виде суммы падающей и отраженной волн



$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \dot{E}_1^+ e^{-i\dot{\gamma}_1 z} + \dot{E}_1^- e^{i\dot{\gamma}_1 z}, \\ \dot{H}_1 &= \dot{H}_1^+ e^{-i\dot{\gamma}_1 z} - \dot{H}_1^- e^{i\dot{\gamma}_1 z}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

а справа от границы в виде только падающей волны

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 &= \dot{E}_2^+ e^{-i\dot{\gamma}_2 z}, \\ \dot{H}_2 &= \dot{H}_2^+ e^{-i\dot{\gamma}_2 z}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

**Рис. 4.1.** Обозначение для анализа поведения электромагнитной волны возле границы раздела двух сред.

Здесь  $\dot{E}_1^+, \dot{H}_1^+, \dot{E}_1^-, \dot{H}_1^-, \dot{E}_2^+, \dot{H}_2^+$  – неизвестные пока постоянные интегрирования, имеющие смысл комплексных амплитуд соответствующих волн. Для уменьшения их количества воспользуемся связью (3.26) между соответствующими амплитудами электрических и магнитных полей:

$$\dot{E}_1^+ / \dot{H}_1^+ = \dot{E}_1^- / \dot{H}_1^- = \dot{Z}_{c1}, \quad \dot{E}_2^+ / \dot{H}_2^+ = \dot{Z}_{c2}.$$

Вводя некоторые безразмерные параметры – коэффициент отражения  $\dot{\rho} = \dot{E}_1^- / \dot{E}_1^+$  и коэффициент прохождения  $\dot{\tau} = \dot{E}_2^+ / \dot{E}_1^+$ , получим выражения для составляющих поля в виде

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_1^+ (e^{-i\dot{\gamma}_1 z} + \dot{\rho} e^{i\dot{\gamma}_1 z}), \quad \dot{H}_1 = \dot{E}_1^+ (e^{-i\dot{\gamma}_1 z} - \dot{\rho} e^{i\dot{\gamma}_1 z}) / \dot{Z}_{c1}, \quad (4.3a)$$

$$\dot{E}_2 = \dot{E}_1^+ \dot{\tau} e^{-i\dot{\gamma}_2 z}, \quad \dot{H}_2 = \dot{E}_1^+ \dot{\tau} e^{-i\dot{\gamma}_2 z} / \dot{Z}_{c2}. \quad (4.3b)$$

Цель этого исследования – определить степень отражения и прохождения электромагнитной волны, то есть определить коэффициенты  $\dot{\rho}$  и  $\dot{\tau}$ , в зависимости от параметров сред. Для этого проведем “сшивание” соответствующих функций по обе стороны от границы, используя граничные условия. Поскольку векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  параллельны границе, то  $\dot{E}_1(-0) = \dot{E}_2(+0)$ ,  $\dot{H}_1(-0) = \dot{H}_2(+0)$  и из (4.3) в точке  $z = 0$  получим  $1 + \dot{\rho} = \dot{\tau}$  и  $1 - \dot{\rho} = \dot{\tau} \dot{Z}_{c1} / \dot{Z}_{c2}$ . Рассматривая эти два равенства как систему уравнений относительно  $\dot{\rho}$  и  $\dot{\tau}$ , в результате её решения получим выражения

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= (\dot{Z}_{c2} - \dot{Z}_{c1}) / (\dot{Z}_{c2} + \dot{Z}_{c1}), \\ \dot{\tau} &= 2\dot{Z}_{c2} / (\dot{Z}_{c1} + \dot{Z}_{c2}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

которые позволяют рассчитывать коэффициенты отражения и прохождения при известных параметрах сред. Укажем, что в общем случае коэффициенты  $\dot{\rho}$  и  $\dot{\tau}$  – комплексные величины, модуль которых характеризует относительную амплитуду волн  $\dot{E}_1^-$  и  $\dot{E}_2^+$ , а фаза – изменение фазы волны на поверхности при отражении или соответственно прохождении.

Анализируя полученные выражения, можно видеть, что значение модуля коэффициента отражения лежит в пределах  $0 \leq |\dot{\rho}| \leq 1$ . Одной из крайних ситуаций является случай одинаковых сред ( $\dot{Z}_{c1} = \dot{Z}_{c2}$ ), когда отражение отсутствует, так как фактически отсутствует граница раздела. Подобное также имеет место, например, для двух диэлектриков с одинаковой диэлектрической проницаемостью.

Полное отражение электромагнитной волны происходит от поверхности идеально проводящей среды ( $\sigma \rightarrow \infty, \dot{Z}_{c2} \rightarrow 0$ ). В этом случае  $\dot{\rho} = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$  и амплитуда волны при отражении не изменяется. Знак “-” для коэффициента отражения означает, что фаза волны электрического поля в плоскости отражения изменяется на  $180^\circ$ , а фаза волны магнитного поля остается неизменной (вторые слагаемые для  $\dot{H}_1$  и  $\dot{E}_1$  в (4.3,a) отличаются знаком).

В результате наложения падающих и отраженных волн перед поверхностью отражения образуется так называемая

“стоячая” волна. Особенности этого явления можно понять, рассматривая аналитическое выражение (4.3,а) для случая  $\dot{\rho} = -1$  и для упрощения  $\alpha = 0$  ( $\dot{\gamma} = k$ ). Восстанавливая временной множитель  $\exp(i\omega t)$  и оставляя действительную часть, получим

$$\begin{aligned} E_1 &= 2E_m^+ \sin kz \cdot \sin(\omega t + \varphi), \\ H_1 &= 2H_m^+ \cos kz \cdot \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Данные выражения описывают не волновой процесс, а гармонические колебания, амплитуда и фаза которых зависят от продольной координаты. Мгновенные “фотографии” этих колебаний, изображенные на рис. 4.2,а, сделаны через промежутки времени  $T/8$  и напоминают колебания струны. В границах одного полупериода колебания происходят синфазно, но амплитуда их в разных точках разная.

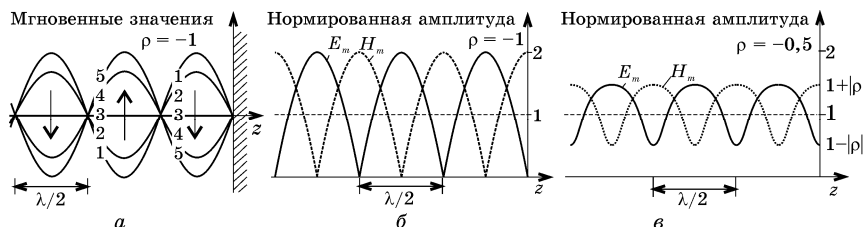


Рис. 4.2. Пространственное распределение мгновенных значений колебаний (а) и их амплитуд (б) при полном отражении ( $\rho = -1$ ) и (в) частичном ( $\rho = -0,5$ ): сплошные линии для электрического поля, штриховые – для магнитных.

Распределение амплитуды, нормированной к амплитуде падающей волны, показано на рис. 4.2,б. Характерной особенностью является наличие “узлов”, то есть точек с нулевой амплитудой, и “пучностей”, где амплитуда максимальна и вдвое превышает амплитуду падающей волны. Причем положение этих точек в пространстве постоянно, что и объясняет используемое название – стоячая волна. Причину такой ситуации понять нетрудно – узлы образуются в тех точках, где падающая и отраженная волны встречаются в противофазе. Для электрического поля “узлы” расположены на расстояниях, кратных половине длины волны, так как на этих расстояниях “набег” фазы при прохождении волны туда и обратно составляет целое число периодов, а противофазность обеспечивается сдвигом фазы на  $180^\circ$  при отражении. Поскольку для магнитного поля фаза при отражении не изменяется, то в тех же точках падающая и отраженная магнитные волны будут встречаться синфазно и образовывать “пучности”. Легко представить, что между двумя

соседними “узлами” электрического поля будут расположены “узлы” магнитного и наоборот.

Подобное явление наблюдается и при неполном отражении. Для описания процессов в общем случае, когда  $0 \leq |\dot{\rho}| < 1$ , можно представить выражения (4.3) для полей над поверхностью отражения, восстановив для наглядности временной множитель  $\exp(i\omega t)$  и считая  $\dot{\gamma} = k$  (потери отсутствуют), в виде:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= E_1^+ (1 + \dot{\rho} e^{i2kz}) e^{i(\omega t - kz)}, \\ \dot{H}_1 &= E_1^+ (1 - \dot{\rho} e^{i2kz}) e^{i(\omega t - kz)} / Z_{c1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Такая форма записи в отличие от (4.3), где поля представлены как сумма падающей и отраженной волны, отвечает только одной волне, падающей, но с амплитудой, изменяющейся в зависимости от координаты (величину  $E_1^+$  считаем действительной):

$$\begin{aligned} E_m(z) &= E_{1m}^+ |1 + \dot{\rho} e^{i2kz}|, \\ H_m(z) &= E_{1m}^+ |1 - \dot{\rho} e^{i2kz}| / Z_{c1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Эти функции периодичны в пространстве и приобретают максимальные значения, в  $(1 + |\dot{\rho}|)$  раз большие, чем амплитуда падающей волны, в точках, называемых “пучностями”. Между ними находятся “узлы”, где амплитуда минимальна и составляет  $(1 - |\dot{\rho}|)$  от амплитуды падающей волны. Со временем пространственное положение этих точек не изменяется, поэтому для процессов, описываемых выражениями (4.6), и используют название “стоячая волна”.

Графики распределения амплитуд электрического и магнитного полей (рис. 4.2,в) полностью совпадают с графиками для амплитуд соответственно напряжения и тока в длинной линии передачи (см. разд. 3.4). Укажем также, что выражения для коэффициентов отражения электромагнитной волны от границы раздела сред и волны напряжения от нагрузки в длинной линии являются подобными при условии соответствующей замены величин. Такая аналогия связана с тем, что эти процессы описываются фактически одинаковыми волновыми уравнениями.

Для углубления этой аналогии рассмотрим, как изменяются комплексные амплитуды электрического и магнитного полей при прохождении волной некоторого расстояния между точками  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 4.3). Запишем выражения для полей соответственно в этих точках в виде сумм падающей и отраженной волн:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \dot{E}^+ e^{-ikz_1} + \dot{E}^- e^{ikz_1}, & \dot{H}_1 &= (\dot{E}^+ e^{-ikz_1} - \dot{E}^- e^{ikz_1})/Z_c; \\ \dot{E}_2 &= \dot{E}^+ e^{-ikz_2} + \dot{E}^- e^{ikz_2}, & \dot{H}_2 &= (\dot{E}^+ e^{-ikz_2} - \dot{E}^- e^{ikz_2})/Z_c. \end{aligned} \quad (4.8)$$

С помощью тождественных преобразований, исключив из этих выражений амплитуды  $\dot{E}^+$  и  $\dot{E}^-$ , получим выражения для  $\dot{E}_2$  и  $\dot{H}_2$  через амплитуды  $\dot{E}_1$ ,  $\dot{H}_1$  и расстояние  $\Delta z = z_2 - z_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 &= \dot{E}_1 \cos k\Delta z - i\dot{H}_1 Z_c \sin k\Delta z, \\ \dot{H}_2 &= -i(\dot{E}_1 / Z_c) \sin k\Delta z + \dot{H}_1 \cos k\Delta z. \end{aligned} \quad (4.9)$$

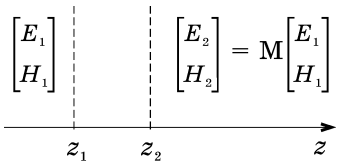


Рис. 4.3. Обозначения к выводу матрицы передачи слоя однородной среды между двумя точками.

Эту пропорциональность между амплитудами можно описать матричным соотношением (рис. 4.3): матрицы-столбцы из соответствующих амплитуд  $\dot{E}$  и  $\dot{H}$  связаны матрицей передачи

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos k\Delta z & -iZ_c \sin k\Delta z \\ -i \sin k\Delta z / Z_c & \cos k\Delta z \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Матрица передачи для слоя вещества при прохождении электромагнитных волн полностью совпадает с матрицей передачи отрезка длинной линии для волн напряжения и тока. Различие в знаках связано с противоположными направлениями отсчета продольной координаты: в длинной линии направление  $x > 0$  выбрано от нагрузки к источнику. Оно исчезает в (4.10), если координату  $z_2$  взять меньшей, чем  $z_1$ , то есть при отрицательных значениях  $\Delta z$ .

Еще одна аналогия наблюдается для трансформации сопротивления. Если ввести понятие комплексного сопротивления для данной точки  $z$  как отношения амплитуд электрического и магнитного полей  $\dot{E}(z) / \dot{H}(z) \equiv \dot{Z}(z)$ , то, разделив первое выражение (4.9) на второе, после простых тождественных преобразований получим:

$$\dot{Z}_2 = Z_c \frac{\dot{Z}_1 - iZ_c \operatorname{tg} k\Delta z}{Z_c - i\dot{Z}_1 \operatorname{tg} k\Delta z}. \quad (4.11)$$

Отношение комплексных амплитуд  $\dot{E}$  и  $\dot{H}$  изменяется (трансформируется) в пространстве по такому же закону, что и отношение  $\dot{V}$  и  $\dot{I}$  вдоль длинной линии (3.58) с учетом направления отсчета. Используя эту аналогию, при наличии стоячих электромагнитных волн можно проводить расчеты,

подобные анализу свойств длинных линий на основе теории цепей с распределенными параметрами.

## 4.2. ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН ЧЕРЕЗ СЛОЙ ВЕЩЕСТВА

Рассмотрим падение плоской электромагнитной волны на слой вещества толщиной  $d$  с волновым сопротивлением  $Z_{c2}$ , который граничит с двумя полубесконечными средами с волновыми сопротивлениями  $Z_{c1}$  и  $Z_{c3}$  (рис. 4.4). Падающая волна испытывает частичное отражение как от первой, так и от второй границы раздела, и проходит в третью среду. Полный анализ этого процесса можно провести, как и в предыдущем разделе, сшивая с помощью граничных условий выражения, подобные (4.1) для первых двух сред и (4.2) для третьей, на каждой границе раздела.

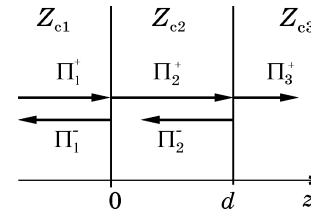


Рис. 4.4. Обозначения для анализа прохождения волны через слой вещества между двумя границами раздела сред.

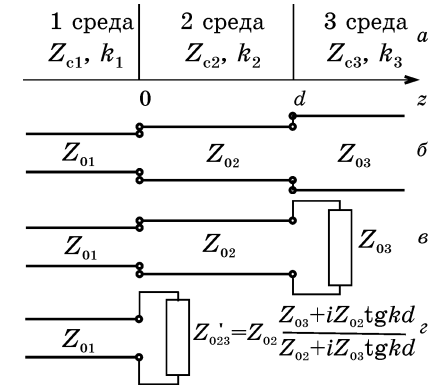


Рис. 4.5. Схемная модель слоя вещества толщиной  $d$  в виде отрезка длинной линии (а) и её трансформирование при перерасчете сопротивлений (б,в).

Однако основные свойства слоя вещества можно исследовать на основе коэффициента отражения  $\dot{\rho} = \dot{E}_1^- / \dot{E}_1^+$  в первой среде. Выражение для него просто получить, используя схемную модель (рис. 4.5,а), построенную по аналогии с длинными линиями. В ней разные среды моделируются отрезками длинных линий с соответствующими волновыми сопротивлениями  $Z_{0i}$  и волновыми числами  $k_i = 2\pi/\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Поскольку третья линия при  $z > d$  бесконечна и в ней не существует отраженной волны, то отношение амплитуд напряжения и тока  $\dot{V}_3^+ / \dot{I}_3^+$  во всех точках одинаково и равняется волновому сопротивлению  $Z_{03}$ . Поэтому ее можно заменить сосредоточенной нагрузкой с сопротивлением, равным  $Z_{03}$ , к отрезку второй линии (рис. 4.5,б). Используя закон

трансформации сопротивления (3.--), пересчитаем эту нагрузку через отрезок линии длиной  $d$  и волновым сопротивлением  $Z_{02}$  на его вход ( $z = 0$ ):

$$\dot{Z}'_{03} = Z_{02} \frac{Z_{03} + iZ_{02} \operatorname{tg} k_2 d}{Z_{02} + iZ_{03} \operatorname{tg} k_2 d}. \quad (4.12)$$

Таким образом вторая и третья линия воспринимаются первой линией как эквивалентная нагрузка с сопротивлением  $\dot{Z}'_{03}$  (рис. 4.5,е). Поэтому коэффициент отражения в первой линии будет равен

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{Z}'_{03} - Z_{01}}{\dot{Z}'_{03} + Z_{01}} = \frac{Z_{02}(Z_{03} - Z_{01}) + i(Z_{02}^2 - Z_{01}Z_{03}) \operatorname{tg} k_2 d}{Z_{02}(Z_{03} + Z_{01}) + i(Z_{02}^2 + Z_{01}Z_{03}) \operatorname{tg} k_2 d}. \quad (4.13)$$

Коэффициент отражения электромагнитных волн от первой границы раздела сред описывается таким же выражением с соответствующей заменой индексов ( $Z_{0i} \rightarrow Z_{ci}$ ).

Анализ этого выражения показывает, что *полное отражение* возможно при условии, если слой вещества представляет собой идеальную проводящую среду ( $Z_{c2} = 0$ ). Независимо от сопротивления третьей среды и толщины слоя коэффициент отражения равен  $-1$ , то есть отраженная и падающая волны на первой границе раздела противофазны.

Если третья среда является идеальным проводником ( $Z_{c3} = 0$ ), то противофазное отражение наблюдается на второй границе раздела ( $z = d$ ). При этом  $\dot{Z}'_{03} = iZ_{02} \operatorname{tg} k_2 d$  и коэффициент отражения (4.13) в плоскости первой границы имеет комплексно сопряженные числитель и знаменатель, поэтому  $|\dot{\rho}| = 1$ , а его фаза зависит от толщины слоя и отношения волновых сопротивлений.

*Полное прохождение* ( $\dot{\rho} = 0$ ) возможно в трех случаях. Для каждого из них необходимо сформулировать два условия, при которых действительная и мнимая части числителя в (4.13) будут равны 0.

а) В простейшем случае, приравнивая нулю выражения в скобках числителя, получим  $Z_{c1} = Z_{c2} = Z_{c3}$ . Фактически это равенство отвечает трем одинаковым средам, когда границы раздела отсутствуют. Но возможно, что и физически разные среды имеют одинаковые волновые сопротивления. Например, довольно распространён случай, когда два диэлектрика имеют одинаковую диэлектрическую проницаемость.

б) Если выбрать первую и третью среды с одинаковыми волновыми сопротивлениями ( $Z_{c1} = Z_{c3}$ ), а толщину слоя независимо от волнового сопротивления  $Z_{c2}$  кратной половине длины волны ( $d = n\lambda_2/2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), то в этом случае  $\operatorname{tg} k_2 d = 0$  и

отражение будет отсутствовать. Поэтому так называемая “полуволновая пластина”, погруженная в другую среду, будет прозрачной. По этой же причине полуволновой отрезок длиной линии, включенный в другую линию, не будет вызывать отражения.

Простая физическая суть этого явления становится понятной, если сравнить между собой коэффициенты отражения  $\rho_1 = (Z_{c2} - Z_{c1}) / (Z_{c2} + Z_{c1})$  только от первой границы и  $\rho_2 = (Z_{c3} - Z_{c2}) / (Z_{c3} + Z_{c2})$  только от второй. При условии  $Z_{c1} = Z_{c3}$  эти коэффициенты отличаются лишь знаком, поэтому отраженные волны имеют одинаковые амплитуды и противоположные фазы в плоскостях отражения. Дополнительный набег фазы волны, отраженной от второй границы, соответствует прохождению ею расстояния  $d$  “туда и обратно”, что составляет  $2k_2 d = 2\pi n$ . Такие волны в первой среде, как противофазные и равные по амплитуде, гасят друг друга и результирующая отраженная волна будет отсутствовать.

в) Условия еще одной возможности полного прохождения волны через слой вещества можно выяснить, предварительно разделив числитель и знаменатель (4.13) на  $\operatorname{tg} k_2 d$ . Тогда действительная часть числителя при разных  $Z_{c1}$  и  $Z_{c3}$  может равняться нулю за счет  $\operatorname{ctg} k_2 d = 0$ , а мнимая – при  $Z_{c2}^2 = Z_{c1}Z_{c3}$ . Это означает, что толщина слоя должна быть кратной нечетному количеству четвертей длины волны ( $d = (2n - 1)\lambda_2/4$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), а его электрические параметры – соответствовать условию  $Z_{c2} = \sqrt{Z_{c1}Z_{c3}}$ .

Такое свойство четвертьволнового слоя используют в оптике для изготовления так называемых “просветлённых” линз, нанося на поверхность линзы пленку вещества с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{\text{пленки}} = \sqrt{\epsilon_{\text{линзы}}}$  и толщиной, равной четверти длины волны красного цвета, чтобы именно в этом диапазоне уменьшить отражение света.

В кабельной и волноводной технике подобное используется в виде *четвертьволновых трансформаторов* для согласованного соединения двух линий передачи с волновыми сопротивлениями  $Z_{01}$  и  $Z_{02}$  с помощью отрезка линии с волновым сопротивлением  $Z_{0\text{тр}} = \sqrt{Z_{01}Z_{02}}$  и длиной в четверть волны.

Физическая суть такого свойства слоя в отличие от предыдущего случая связана с тем, что коэффициенты отражения от каждой границы в этом случае одинаковы по амплитуде и фазе. Противофазность отраженных от границ волн обеспечивается дополнительным для второй волны набегом фазы на расстоянии  $2d$ :  $2k_2 d = (2n - 1)\pi$ . Поэтому в результате их интерференции в первой среде отраженная волна будет отсутствовать.

Следует помнить, что рассмотренные свойства связаны с определенной длиной волны и являются *резонансными*: при

отклонении частоты колебаний от расчетной коэффициент отражения довольно быстро возрастает. Для расширения полосы частот, в которой прохождение волны можно считать в достаточной мере полным, можно использовать не один слой согласующего вещества, а два и более, или несколько четвертьволновых трансформаторов для соединения длинных линий с разными волновыми сопротивлениями.

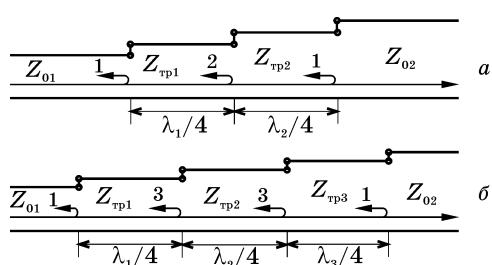


Рис. 4.6. Соединение длинных линий двумя (а) и тремя (б) четвертьволновыми трансформаторами. Цифры обозначают относительные значения амплитуд волн, отраженных от отдельных мест соединения.

На рис. 4.6 изображены примеры таких соединений. Одна из возможностей выбора волнового сопротивления трансформаторов, которая часто используется на практике, состоит в том, что отношение коэффициентов отражения от каждого отдельного соединения должно быть пропорциональным отношению биномиальных коэффициентов. Например, при двух трансформаторах – 1:2:1, при трех – 1:3:3:1 и так далее. Не обращаясь к относительно сложной теории таких ступенчатых переходов между двумя линиями, это можно просто понять, рассматривая два трансформатора (рис. 4.6,а) как объединение в одной конструкции двух отдельных четвертьволновых трансформаторов, сдвинутых на расстояние  $\lambda/4$ . Соответственно половина амплитуды волны, отраженной от второго соединения, гасится отраженной волной от первого, а половина – от третьего соединения. Так же трёхтрансформаторный переход с отношением отраженных амплитуд 1:3:3:1 (рис. 4.6,б) можно представить как объединение двух предыдущих переходов с отношением 1:2:1, сдвинутых также на  $\lambda/4$ . Продолжая этот принцип на случай  $n$ -трансформаторного соединения, нетрудно понять, что отношение амплитуд волн, отраженных от отдельных мест соединений, должно быть таким же, как и отношение коэффициентов разложения бинома  $(a+b)^n$ .

Подобные принципы могут быть использованы в оптике для создания многослойных неотражающих пленок для оптических линз. Определенные трудности здесь связаны лишь с подбором вещества для отдельных слоёв, которые должны иметь хорошо подобранные значения диэлектрической проницаемости.

На рис. 4.6 изображены примеры таких соединений. Одна из возможностей выбора волнового сопротивления трансформаторов, которая часто используется на практике, состоит в том, что отношение коэффициентов отражения от каждого отдельного соединения должно быть пропорциональным отношению биномиальных коэффициентов. Например, при двух трансформаторах – 1:2:1, при трех – 1:3:3:1 и так далее.

Рассмотрим еще один пример многослойной структуры. Пусть в воздухе с волновым сопротивлением  $Z_{c0}$  размещено несколько пар слоёв с чередующимися волновыми сопротивлениями  $Z_{c1}$  и  $Z_{c2}$ , и толщина каждого слоя равняется четверти длины волны в соответствующей среде. Трансформируя сопротивление  $Z_{c0}$  сначала через четвертьволновый отрезок с сопротивлением  $Z_{c2}$  согласно (4.11) будем иметь  $Z_{c0}' = Z_{c2}^2/Z_{c0}$ , а затем, пересчитывая  $Z_{c0}'$  через отрезок длиной  $\lambda_2/4$  с сопротивлением  $Z_{c1}$ , получим  $Z_{c0}'' = Z_{c1}^2/Z_{c0}' = (Z_{c1}/Z_{c2})^2 Z_{c0}$ . Продолжая эту процедуру, можно представить (рис. 4.7,б) всю многослойную структуру как некоторую эквивалентную среду с волновым сопротивлением

$$Z_{c0}^{\text{эКВ}} = (Z_{c1}/Z_{c2})^{2n} Z_{c0}, \quad (4.14)$$

где  $n$  – количество пар слоёв в структуре. В таком случае коэффициент отражения волны, падающей на  $n$ -слойную структуру, равняется

$$\rho = \frac{Z_{c0}^{\text{эКВ}} - Z_{c0}}{Z_{c0}^{\text{эКВ}} + Z_{c0}} = \frac{(Z_{c1}/Z_{c2})^{2n} - 1}{(Z_{c1}/Z_{c2})^{2n} + 1}. \quad (4.15)$$

Из этого выражения видно, что при разных веществах слоёв независимо от соотношения  $Z_{c1}/Z_{c2}$  модуль коэффициента отражения стремится к 1 при увеличении количества слоёв. Если, например, диэлектрическая проницаемость слоёв отличается в 4 раза, то  $Z_{c1}/Z_{c2} = 2$  и коэффициент отражения равен 0,6 при  $n = 1$ ; 0,88 при  $n = 2$ ; 0,97 при  $n = 3$  и т.д. То есть качественная зеркальная поверхность может быть не только металлической, ее можно изготовить из чередующихся диэлектрических пленок. С физической точки зрения это просто объясняется тем, что коэффициенты отражения от соседних границ будут равными по модулю и разными по знаку. Дополнительный сдвиг фазы на  $180^\circ$  обеспечивается разностью хода дважды по  $\lambda/4$  на толщине каждого слоя “туда и обратно”. Таким образом, все отраженные волны будут синфазными, а суммирование их амплитуд обеспечивает практически полное отражение.

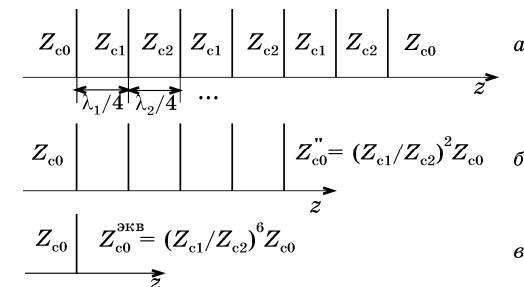


Рис. 4.7. Многослойная структура из чередующихся четвертьволновых пленок (а), трансформирование сопротивления второй полубесконечной среды через одну пару слоёв (б) и через всю многослойную структуру (в).

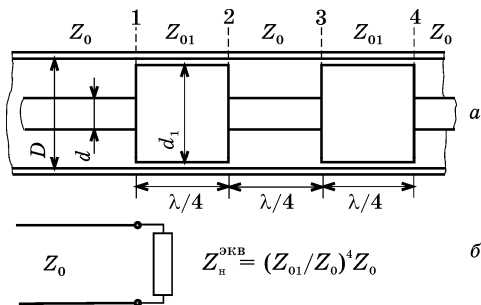


Рис. 4.8. Ступенчатое соединение четвертьволновых отрезков коаксиальных линий как короткозамкнутая структура (а) и ее схемная модель в виде длинной линии с эквивалентной нагрузкой (б).

Такую интерференцию отраженных волн часто используют для создания эффективного режима короткого замыкания в линиях передачи. На рис. 4.8 изображена конструкция на основе коаксиальной линии, которая имеет два утолщения центрального проводника длиной по  $\lambda/4$  с таким же расстоянием между ними. По своим свойствам эта конструкция подобна рассмотренной выше многослойной структуре при  $n = 2$  и замене обозначений  $Z_{c0}$  и  $Z_{c2}$  на  $Z_0$ , а  $Z_{c1}$  на  $Z_{01}$ . Если выбрать конкретные размеры линии, например,  $D = 17,5$  мм,  $d = 5$  мм,  $d_1 = 16,5$  мм, то по формуле, которая будет приведена в гл.5 при рассмотрении коаксиального волновода, можно рассчитать волновые сопротивления основной коаксиальной линии  $Z_0 = 75$  Ом и четвертьволновых отрезков линии с утолщенным внутренним проводником  $Z_{01} = 3,5$  Ом. Трансформируя сопротивление  $Z_0$  из сечения 4 последовательно через четвертьволновые отрезки к сечению 1, получим, что вся конструкция представляет собой для основной коаксиальной линии некоторую эквивалентную нагрузку с сопротивлением  $Z_n^{\text{экр}} = (Z_{01}/Z_0)^4 Z_0$ . Это выражение совпадает с (4.14) с точностью до обозначений при  $n = 2$ . Для заданных размеров и соответствующих волновых сопротивлений  $Z_n^{\text{экр}} = 3,5 \cdot 10^{-4}$  Ом. Такая нагрузка обеспечивает коэффициент отражения  $-1$  с точностью до шестого знака, почти такой же, как и при коротком замыкании линии (но без омического контакта между проводниками!).

Следует помнить, что такое свойство наблюдается на той частоте  $f_0$ , где толщины пленок (или отрезков линий) будут равняться четверти длины волны. Но на частоте, в два раза выше, чем  $f_0$ , такая структура будет прозрачной, так как пленки уже будут полуволновыми. На частоте  $3f_0$  толщина слоев будет составлять  $3\lambda/4$  и структура снова будет отражать. Таким образом, на частотной шкале полосы отражения волн чередуется с полосами пропускания. Эти свойства являются общими для периодических структур и широко используются для изготовления разнообразных фильтрующих устройств в оптике и сверхвысокочастотной технике.

### 4.3. НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА

При наклонном падении электромагнитной волны на границу раздела двух сред, как и при нормальном, наблюдается отражение и прохождение волны во вторую среду. Однако в отличие от нормального падения здесь при определенных условиях возможны особые случаи полного прохождения или полного отражения. Одна из примечательных особенностей поведения волн возле границы раздела связана с направляющим действием поверхности. Это легко представить из рис. 4.9,а. Перпендикулярные к поверхности потоки падающей и отраженной волн направлены навстречу друг другу и образуют вертикальную периодическую структуру полей в виде *стоячих* волн. Сумма продольных составляющих образует поток вдоль поверхности, который распространяется в виде бегущей волны. Такая особенность используется для создания волноводов – систем, направляющих распространение электромагнитных волн.

#### 4.3.1. Поля возле границы раздела

Для описания полей вблизи границы раздела проведем через вектор Пойнтинга для падающей волны  $\Pi^+$  перпендикулярно к поверхности отражения так называемую плоскость падения (рис. 4.9). Она будет проходить также через векторы Пойнтинга для отраженной ( $\Pi^-$ ) и преломленной ( $\Pi^-$ ) волн, так как в процессе отражения перпендикулярного к ней потока энергии не возникает. Следует отметить, что термин “преломленная волна” происходит из лучевой оптики и использование его в волновой теории оправдано лишь с точки зрения изменения направления волны после прохождения ее во вторую среду

Обозначим углы падения  $\varphi^+$ , отражения  $\varphi^-$  и преломления  $\varphi^-$  как углы между нормалью к границе раздела и соответствующими направлениями распространения волн. Координатные оси удобно связать с границей раздела, как указано на рис. 4.9. В этом случае фаза волнового множителя (в.м.) для волны, распространяющейся под углом к границе раздела, не будет иметь слагаемого, которое характеризует изменение фазы в  $y$ -направлении:

$$\text{в.м.} = \exp[i(\omega t - \mathbf{kr})] = \exp[i(\omega t - k_x x - k_z z)]. \quad (4.16)$$

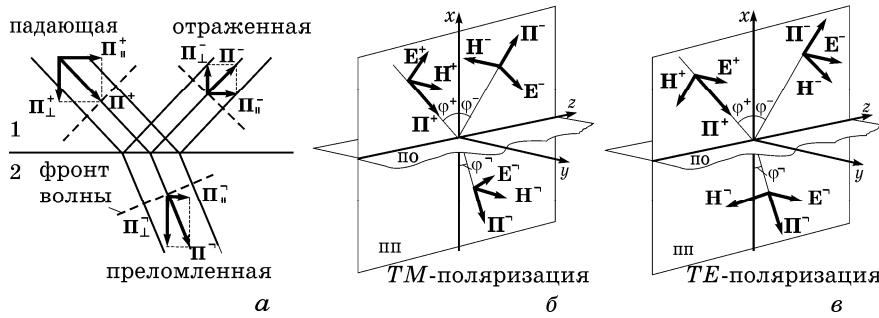


Рис. 4.9. Условное изображение поведения волн возле границы раздела двух сред (а), ориентация векторов поля и вектора Пойнтинга для  $TM$ - (б) и  $TE$ -волн (в) относительно плоскости падения (ПП) и плоскости отражения (ПО).

При наклонном падении поведение волны возле границы зависит от направления её поляризации, поэтому анализ удобно проводить отдельно для волн с разной поляризацией. Будем называть  $TM$ -волной (от англ. *Transverse Magnetic Field*) случай, когда вектор  $\mathbf{E}$  совпадает с плоскостью падения, а вектор  $\mathbf{H}$  расположен параллельно границе раздела (рис. 4.9,б), то есть поперечным к координате  $z$ . Иногда такую ситуацию называют *параллельной поляризацией* соответственно размещению вектора  $\mathbf{E}$  относительно плоскости падения. Другой случай соответствует *перпендикулярной поляризации* (рис. 4.9,в): вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости падения, а вектор  $\mathbf{H}$  ей параллелен. Его будем называть  $TE$ -волной (*Transverse Electric Field*).

Сначала рассмотрим  $TM$ -волны, для которых вектор электрического поля имеет проекции  $E_x$  и  $E_z$ , а вектор магнитного поля —  $H_y$ . Выражения для комплексных амплитуд этих составляющих легко получить, проецируя векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  на соответствующие оси координат (рис. 4.10). Тогда будем иметь:

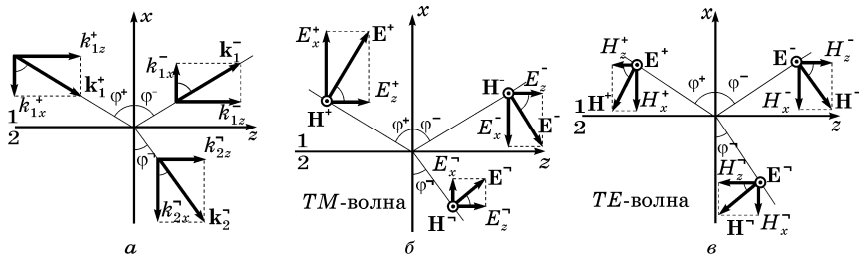


Рис. 4.10. Проекция волнового вектора (а) и векторов поля на координатные оси: б — для  $TM$ -волн, вектор магнитного поля имеет только  $y$ -проекцию, в — для  $TE$ -волн, вектор электрического поля имеет только  $y$ -проекцию.

для падающей волны

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x^+ &= \dot{E}^+ \sin \varphi^+ \\ \dot{E}_z^+ &= \dot{E}^+ \cos \varphi^+ \\ \dot{H}_y^+ &= \dot{E}^+ / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(k_1 x \cos \varphi^+ - k_1 z \sin \varphi^+)], \quad (4.17)$$

для отраженной волны

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x^- &= -\dot{E}^- \sin \varphi^- \\ \dot{E}_z^- &= \dot{E}^- \cos \varphi^- \\ \dot{H}_y^- &= -\dot{E}^- / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(-k_1 x \cos \varphi^- - k_1 z \sin \varphi^-)], \quad (4.18)$$

для преломленной волны выражения отличаются от (4.17) только соответствующими индексами

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x^- &= \dot{E}^- \sin \varphi^- \\ \dot{E}_z^- &= \dot{E}^- \cos \varphi^- \\ \dot{H}_y^- &= \dot{E}^- / Z_{c2} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(k_2 x \cos \varphi^- - k_2 z \sin \varphi^-)]. \quad (4.19)$$

В этих выражениях принято для упрощения, что комплексные постоянные распространения  $\dot{\gamma}_{1,2}$  (3.22) включают только волновые числа  $k_{1,2}$ , а постоянные затухания  $\alpha_{1,2} = 0$ . Это оправдано, если рассматривать только ближнюю к границе раздела зону, где поглощением волны можно пренебречь. Подобное можно отнести и к волновым сопротивлениям: будем считать их действительными величинами, а те случаи, где принципиально необходимо учитывать потери и считать их комплексными, будут оговорены отдельно.

Для определения постоянных интегрирования, которыми являются амплитуды  $\dot{E}^+$ ,  $\dot{E}^-$  и  $\dot{E}^-$ , воспользуемся граничными условиями в виде равенств касательных составляющих полей на поверхности раздела ( $x = 0$ ):

$$\dot{H}_y^+(+0) + \dot{H}_y^-(+0) = \dot{H}_y^-(-0), \quad (4.20,а)$$

$$\dot{E}_z^+(+0) + \dot{E}_z^-(-0) = \dot{E}_z^-(-0). \quad (4.20,б)$$

Подставляя в первое граничное условие выражения для составляющих из (4.17) — (4.19) при  $x = 0$ , получим равенство

$$\frac{\dot{E}^+}{Z_{c1}} e^{-ik_1 z \sin \varphi^+} + \frac{\dot{E}^-}{Z_{c1}} e^{-ik_1 z \sin \varphi^-} = \frac{\dot{E}^-}{Z_{c2}} e^{-ik_2 z \sin \varphi^-}, \quad (4.21)$$

которое должно выполняться в любой точке вдоль оси  $z$ . Это возможно, если аргументы экспонент равны между собой:

$$k_1 \sin \varphi^+ = k_1 \sin \varphi^- = k_2 \sin \varphi^-. \quad (4.22)$$

Отсюда вытекают два известных закона: 1) *угол отражения равен углу падения*

$$\varphi^- = \varphi^+, \quad (4.23)$$

2) *отношение синусов углов падения и преломления обратно пропорционально отношению волновых чисел в соответствующих средах:*

$$\frac{\sin \varphi^-}{\sin \varphi^+} = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}}. \quad (4.24)$$

В оптике этот закон известен как закон Снелля (Снеллиуса), где в правой части стоит отношение показателей преломления  $n_1/n_2 = \sqrt{\varepsilon_1} / \sqrt{\varepsilon_2}$ .

При выполнении (4.22) первое граничное условие (4.21) принимает вид

$$\dot{E}^+ - \dot{E}^- = \dot{E}^- Z_{c1} / Z_{c2}, \quad (4.25)$$

и соответственно второе (4.20,б) с учетом (4.23):

$$\dot{E}^+ + \dot{E}^- = \dot{E}^- \cos \varphi^- / \cos \varphi^+. \quad (4.26)$$

Из этих двух условий могут быть найдены лишь две постоянные интегрирования, например, амплитуды отраженной и преломленной волн при известной амплитуде падающей волны. В таком случае удобно их пронормировать на  $\dot{E}^+$  и обозначить  $\dot{\rho} = \dot{E}^- / \dot{E}^+$ ,  $\dot{\tau} = \dot{E}^- / \dot{E}^+$ , тогда

$$\begin{cases} 1 - \dot{\rho} = \dot{\tau} Z_{c1} / Z_{c2}, \\ 1 + \dot{\rho} = \dot{\tau} \cos \varphi^- / \cos \varphi^+. \end{cases} \quad (4.27)$$

Решая эту систему относительно  $\dot{\rho}$  и  $\dot{\tau}$ , получим так называемые *формулы Френеля для ТМ-волн*

$$\dot{\rho}_{TM} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi^- - Z_{c1} \cos \varphi^+}{Z_{c2} \cos \varphi^- + Z_{c1} \cos \varphi^+}, \quad (4.28)$$

$$\dot{\tau}_{TM} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi^+}{Z_{c2} \cos \varphi^- + Z_{c1} \cos \varphi^+}, \quad (4.29)$$

которые позволяют определить степень отражения и прохождения электромагнитных волн при известных параметрах сред и заданном угле падения.

Необходимо отметить, что выражения (4.28) и (4.29) в предельном случае для  $\varphi^+ = 0$  дают значения, которые совпадают с коэффициентами отражения и прохождения по формуле (4.4) при нормальном падении.

Для ТЕ-волн подобный анализ надо проводить отдельно. Как видно из рис. 4.10,в, в этом случае вектор  $\mathbf{E}$  имеет только одну составляющую  $E_y$ , а вектор  $\mathbf{H}$  две —  $H_x$  и  $H_z$ , причем *для падающей волны:*

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_y^+ &= E^+ \\ \dot{H}_x^+ &= -\dot{E}^+ \sin \varphi^+ / Z_{c1} \\ \dot{H}_z^+ &= -\dot{E}^+ \cos \varphi^+ / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(k_1 x \cos \varphi^+ - k_1 z \sin \varphi^+)], \quad (4.30)$$

*для отраженной волны:*

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_y^- &= \dot{E}^- \\ \dot{H}_x^- &= -\dot{E}^- \sin \varphi^- / Z_{c1} \\ \dot{H}_z^- &= \dot{E}^- \cos \varphi^- / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(-k_1 x \cos \varphi^- - k_1 z \sin \varphi^-)] \quad (4.31)$$

*и для преломленной волны:*

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_y^- &= \dot{E}^- \\ \dot{H}_x^- &= -\dot{E}^- \sin \varphi^- / Z_{c1} \\ \dot{H}_z^- &= -\dot{E}^- \cos \varphi^- / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(k_2 x \cos \varphi^- - k_2 z \sin \varphi^-)]. \quad (4.32)$$

Здесь, как и для ТМ-волн, постоянные интегрирования могут быть найдены из граничных условий, аналогичных (4.20). После соответствующих преобразований законы отражения (4.23) и преломления (4.24) останутся такими же, а формулы Френеля для ТЕ-волн будут иметь вид:

$$\dot{\rho}_{TE} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi^+ - Z_{c1} \cos \varphi^-}{Z_{c2} \cos \varphi^+ + Z_{c1} \cos \varphi^-}, \quad (4.33)$$

$$\dot{\tau}_{TE} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi^+}{Z_{c2} \cos \varphi^+ + Z_{c1} \cos \varphi^-}. \quad (4.34)$$

Эти формулы при  $\varphi^+ = 0$  дают те же соотношения, что и при нормальном падении, так как здесь коэффициенты отражения и прохождения определены через отношение сонаправленных векторов электрического поля.



В полученных выражениях следует обратить внимание на две особенности. Первая связана с тем, что проекции волновых векторов в обеих средах на границу раздела равны между собой (4.22):

$$k_1 \sin \varphi^+ = k_2 \sin \varphi^- \equiv K. \quad (4.35)$$

Это означает, что выражения для всех составляющих поля имеют общий волновой множитель  $\exp[i(\omega t - Kz)]$ , описывающий волновой процесс, который распространяется вдоль границы раздела с постоянной распространения  $K \leq k_{1,2}$  и соответственно с длиной волны вдоль границы  $\Lambda = 2\pi/K \geq 2\pi/k_{1,2} = \lambda_{1,2}$ . Поэтому и фазовая скорость этого процесса  $v_\phi = \omega/K$  вдоль границы будет большей, чем скорость  $\omega/k_{1,2}$  в направлении распространения в обеих средах, или, как говорят, в свободной среде.

Вторая характерная особенность связана с отличием формул Френеля для *TE*- и *TM*-волн. Поэтому и поведение волн с разной поляризацией возле границы раздела сред, как это увидим в следующих примерах, может быть разным.

#### 4.3.2. Полное прохождение волны через границу, угол Брюстера

Формулы Френеля для коэффициентов отражения имеют в числителе разность, поэтому естественным является вопрос, можно ли осуществить физические условия, при которых отраженная волна отсутствует ( $\rho = 0$ ). Рассмотрим эти условия сначала для *TM*-волн. Равенство слагаемых в числителе (4.28) представим в виде  $Z_{c1}^2 \cos^2 \varphi^+ = Z_{c2}^2 \cos^2 \varphi^-$ , где заменим  $\cos^2 \varphi^+ = 1 - \sin^2 \varphi^+$  и с учетом закона преломления  $\cos^2 \varphi^- = 1 - \sin^2 \varphi^- = 1 - (k_1/k_2)^2 \sin^2 \varphi^+$ . Решая последнее равенство относительно  $\sin^2 \varphi^+$ , получим условие, при котором отражение от границы раздела отсутствует:

$$\sin^2 \varphi^+ = \frac{1 - (Z_{c2}/Z_{c1})^2}{1 - (k_1 Z_{c2}/k_2 Z_{c1})^2} = \frac{1 - \mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2}{1 - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2}. \quad (4.36)$$

Именно при таком значении угла падения, которое зависит от параметров сред, наблюдается полное прохождение волны во вторую среду. Эти параметры должны удовлетворять условию  $1 \geq (1 - \mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2) / [1 - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2] \geq 0$ . Данное условие невыполнимо при одинаковых диэлектрических проницаемостях сред. Характерным является случай двух разных диэлектрических сред с  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  и  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Тогда из (4.36)  $\sin^2 \varphi^+ = 1 / (1 + \varepsilon_1 / \varepsilon_2)$ , или учитывая, что  $\sin^2 \varphi = 1 / (1 + \text{ctg}^2 \varphi)$ , получим

$$\varphi^+ = \text{arctg} \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}. \quad (4.37)$$

Аналогично, приравнявая нулю числитель (4.33), можно получить условие полного прохождения *TE*-волны через границу в виде:

$$\sin^2 \varphi^+ = \frac{1 - (Z_{c1}/Z_{c2})^2}{1 - (k_1 Z_{c1}/k_2 Z_{c2})^2} = \frac{1 - \mu_1 \varepsilon_2 / \mu_2 \varepsilon_1}{1 - (\mu_1 / \mu_2)^2}. \quad (4.38)$$

В отличие от (4.36) данное условие может быть выполнено лишь для веществ с разной магнитной проницаемостью. Если  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ , то отсюда можно получить, что *TE*-волна не отражается от границы раздела при

$$\varphi^+ = \text{arctg} \sqrt{\mu_2 / \mu_1}. \quad (4.39)$$

На рис. 4.11 изображены рассчитанные по формулам (4.28) и (4.33) зависимости коэффициентов отражения от угла падения. Их вид существенно отличается для волн разной поляризации. Поэтому при падении на поверхность раздела, например, диэлектрических сред электромагнитной волны со смешанной поляризацией под углом, который определяется по (4.37), *TM*-составляющая волны полностью проходит во вторую среду. Отраженная волна будет содержать только *TE*-составляющую и поляризуется таким образом, что вектор **E** будет параллелен к границе раздела. Это явление известно в оптике как *закон Брюстера*, а значение угла падения (4.37) носит название *угла Брюстера*.

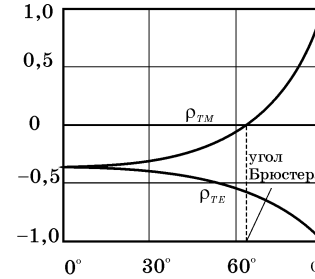


Рис. 4.11. Зависимость коэффициентов отражения волн разной поляризации от угла падения на границу раздела стекло-воздух-стекло ( $\varepsilon_2 = 4$ ).

Для солнечного света характерна спонтанная поляризация квантов, и при освещении ими диэлектрической поверхности под таким углом отраженный свет будет горизонтально поляризованным. Подобное наблюдается также для волны, которая линейно поляризована под некоторым углом к плоскости падения. При углах падения, больших чем угол Брюстера, из-за разных фаз коэффициентов отражения для *TE*- и *TM*-волн отраженная волна становится эллиптически поляризованной.

Физическое объяснение такому поведению электромагнитных волн связано с особенностями поглощения и переизлучения волн электронами кристаллической решетки твердого тела,

но оно находится вне границ классической макроскопической теории поля.

### 4.3.3. Полное внутреннее отражение

Еще одна интересная ситуация наблюдается, если  $k_1 > k_2$ , или, как иногда говорят в оптике, если первая среда имеет большую оптическую плотность. В этом случае угол преломления больше, чем угол падения и достигает значения в  $90^\circ$  уже при  $\varphi^+ < 90^\circ$ . Например, если электромагнитная волна падает со стороны стекла ( $\varepsilon_1 = 4$ ) на границу с воздухом ( $\varepsilon_1 = 1$ ), то из (4.24) вытекает, что  $\sin\varphi^- = 1$  ( $\varphi^- = 90^\circ$ ) при  $\sin\varphi^+ = 1/2$  ( $\varphi^+ = 30^\circ$ ) и волна во второй среде распространяется вдоль границы раздела. То есть, при выполнении условия

$$\varphi^+ \geq \arcsin(k_1/k_2) = \arcsin\sqrt{\varepsilon_2\mu_2/\varepsilon_1\mu_1} \quad (4.40)$$

действительное значение угла преломления отсутствует и соответственно не существует волны, проходящей во вторую среду. Это и есть условие *полного внутреннего отражения*.

Чтобы это доказать, отметим, что  $\cos\varphi^- = \sqrt{1 - \sin^2\varphi^-} = \sqrt{1 - (k_1/k_2)^2 \sin^2\varphi^+}$ . При углах падения, больших чем (4.40), выражение под корнем становится отрицательным и значение косинуса становится мнимым:

$$\cos\varphi^- = i\sqrt{(k_1/k_2)^2 \sin^2\varphi^+ - 1} = \pm i|\cos\varphi^-|. \quad (4.41)$$

В таком случае формулы (4.28) и (4.33) для коэффициента отражения будут иметь в числителе и знаменателе комплексно сопряжённые выражения, модули которых имеют одинаковые значения. Поэтому, например, для *ТМ*-волн

$$\dot{\rho}_{TM} = -\frac{Z_{c1} \cos\varphi^+ \mp iZ_{c2} |\cos\varphi^-|}{Z_{c1} \cos\varphi^+ \pm iZ_{c2} |\cos\varphi^-|} = 1 \cdot e^{i2\psi_0}, \quad (4.42)$$

и отражение будет полным, так как  $|\dot{\rho}| = 1$  независимо от степени неравенства (4.40). От этого зависит сдвиг фазы отражения, который здесь удобно обозначить как  $2\psi_0$ .

Представление о структуре поля над поверхностью полного внутреннего отражения можно получить, суммируя выражения для одноименных проекций поля падающей и отраженной волн при  $\dot{E}^- = \dot{E}^+ e^{i2\psi_0}$ . Например, из суммы выражений (4.17) и (4.18)

для проекций комплексных амплитуд получим для *ТМ*-волн при  $k_{1x} = k_1 \cos\varphi^+$

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= i2E^+ \sin\varphi^+ \sin(k_{1x}x - \psi_0) e^{-i(Kz - \psi_0)}, \\ \dot{E}_z &= 2E^+ \cos\varphi^+ \cos(k_{1x}x - \psi_0) e^{-i(Kz - \psi_0)}, \\ \dot{H}_y &= i2(E^+/Z_{c1}) \sin(k_{1x}x - \psi_0) e^{-i(Kz - \psi_0)}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Умножая эти выражения на временной множитель  $e^{i\omega t}$  и оставляя только действительную часть, перейдем от комплексных амплитуд к действительным мгновенным значениям

$$\begin{aligned} E_x &= -2E_m^+ \sin\varphi^+ \sin(k_{1x}x - \psi_0) \sin(\omega t - Kz + \psi_0), \\ E_z &= 2E_m^+ \cos\varphi^+ \cos(k_{1x}x - \psi_0) \cos(\omega t - Kz + \psi_0), \\ H_y &= -2(E_m^+/Z_{c1}) \sin(k_{1x}x - \psi_0) \sin(\omega t - Kz + \psi_0). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Если подобные преобразования провести с выражениями (4.30) и (4.31), для мгновенных значений проекций полей *ТЕ*-волн будем иметь

$$\begin{aligned} E_y &= 2E_m^+ \cos(k_{1x}x - \psi_0) \cos(\omega t - Kz + \psi_0), \\ H_x &= -2(E_m^+/Z_{c1}) \sin\varphi^+ \cos(k_{1x}x - \psi_0) \cos(\omega t - Kz + \psi_0), \\ H_z &= 2(E_m^+/Z_{c1}) \cos\varphi^+ \sin(k_{1x}x - \psi_0) \sin(\omega t - Kz + \psi_0). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Главная особенность полей над поверхностью полного внутреннего отражения следует из наличия в выражениях (4.44) и (4.45) волновых множителей в виде  $\sin(\omega t - Kz + \psi_0)$  или  $\cos(\omega t - Kz + \psi_0)$ . Эти выражения описывают волновой процесс, который распространяется вдоль координаты  $z$ , то есть параллельно поверхности отражения, с постоянной распространения  $K = k_1 \sin\varphi^+$  и с фазовой скоростью  $v_\phi = \omega/K = c_1/\sin\varphi^+$  и длиной волны  $\Lambda = 2\pi/K = \lambda_1/\sin\varphi^+$ . Надо обратить внимание на то, что последние величины *больше*, чем соответственно скорость света и длина волны в направлении её падения в первой среде (в свободном пространстве).

Важно также то, что амплитудная часть выражений (4.44) и (4.45) содержит периодические множители  $\sin(k_{1x}x - \psi_0)$  или  $\cos(k_{1x}x - \psi_0)$ . Это означает образование стоячей волны в вертикальном направлении, перпендикулярном к плоскости отражения. На высоте, где множители принимают нулевые значения, получаются узлы, а там, где они имеют максимальные значения, амплитуды соответствующих составляющих поля удваиваются (пучности). Укажем также, что проекции  $E_x$  и  $H_y$ ,

или  $E_y$  и  $H_x$ , поперечные к направлению распространения, описываются одинаковыми функциями.

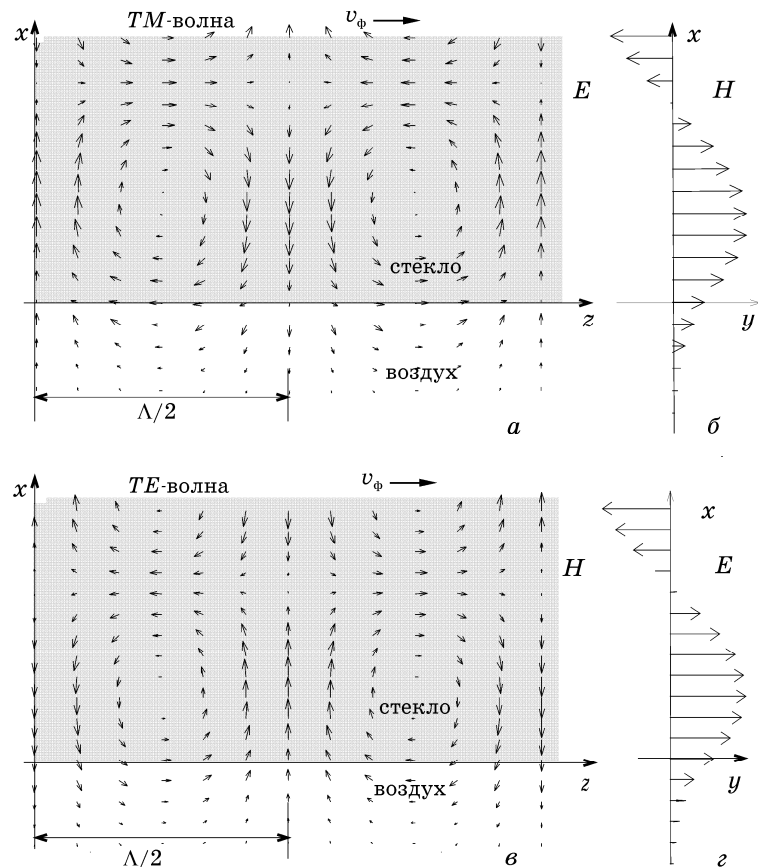


Рис. 4.12. Мгновенные “фотографии” пространственного распределения векторов электрического (а) и магнитного (б) поля возле поверхности полного внутреннего отражения для  $TM$ -волны, которая падает на границу раздела стекло-воздух ( $\epsilon_1/\epsilon_2 = 4/1$ ) под углом  $\varphi^+ = 60^\circ$ . То же самое для магнитного (в) и электрического (г) поля в случае  $TE$ -волны. Распределение  $y$ -составляющих (б,г) приведено для крайнего поперечного сечения слева.

Интереснейшая особенность этого процесса состоит в том, что электромагнитные поля существуют и по ту сторону от поверхности внутреннего отражения. Это можно понять на основе выражений (4.19) и (4.32), где  $\cos\varphi^-$  принимает мнимое значение (4.41). Тогда волновой множитель будет иметь вид

$$\exp[i(\omega t \pm ik_2x|\cos\varphi^-| - Kz)] = \exp[\mp k_2x|\cos\varphi^-|] \exp[i(\omega t - Kz)]. \quad (4.46)$$

Процесс, который описывается таким выражением, представляет собой волну, распространяющуюся вдоль поверхности отражения с таким же волновым числом и с такой же фазовой скоростью, как и в первой среде. Но амплитуда этой волны при удалении от поверхности (напомним, что речь идет об области  $x < 0$ ) уменьшается по экспоненциальному закону  $\exp(k_2|\cos\varphi^-|x)$ . Если вторая среда бесконечна, то физический смысл имеет только нижний знак в (4.46). Можно считать, что эти поля локализованы в приповерхностном слое, толщина которого имеет порядок  $\Delta x = 1/k_2|\cos\varphi^-|$ , и образуют так называемую *поверхностную волну*.

Наглядное представление о структуре полей возле поверхности полного внутреннего отражения можно получить из рис. 4.12, где с помощью векторов электрического и магнитного поля изображена структура полей для  $TM$ - и  $TE$ -волн, которые соответствуют выражениям (4.44) – (4.46) в фиксированный момент времени. С течением времени вся картина поля перемещается вдоль поверхности с фазовой скоростью  $v_\varphi$ .

Согласовать между собой явления полного отражения от поверхности и проникновения полей в среду за поверхностью помогает представление, что волна отражается не непосредственно от границы раздела, а как-бы распределенно, заходя в другую область в виде некоторых краевых полей (рис. 4.12), которые и образуют поверхностную волну. Тогда понятным становится факт прохождения волны под тем же углом (падения), если на некотором расстоянии от поверхности полного внутреннего отражения разместить такую же среду, как и первая. При этом амплитуда прошедшей волны в соответствии с законом (4.46) будет экспоненциально уменьшаться с увеличением этого расстояния.

#### 4.3.4. Отражение от поверхности идеального проводника

Полное отражение электромагнитных волн наблюдается, как и для нормального падения, если вторая среда является идеальным проводником ( $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $Z_{c2} = 0$ ). Коэффициенты отражения по формулам (4.28) или (4.33) в этом случае имеют значения  $\rho_{TM} = \rho_{TE} = -1$ .

Конфигурация полей над поверхностью подобна случаю полного внутреннего отражения и зависит от направления поляризации волны. Для  $TM$ -волны выражения для составляющих поля можно получить из (4.45), приняв в них  $\psi_0 = \pi/2$ , так как  $\rho_{TM} = 1 \cdot e^{i\pi}$  (индекс 1 при обозначении параметров сред опускаем, так как во второй среде электромагнитные поля отсутствуют):

$$\begin{aligned} E_x &= 2E_m^+ \sin\varphi^+ \cos k_x x \cos(\omega t - Kz), \\ E_z &= -2E_m^+ \cos\varphi^+ \sin k_x x \sin(\omega t - Kz), \\ H_y &= 2(E_m^+/Z_c) \cos k_x x \cos(\omega t - Kz). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Для  $TE$ -волн  $\rho_{TE} = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ , поэтому  $\psi_0 = \pi/2$  и из (4.45) получим:

$$\begin{aligned} E_y &= -2E_m^+ \sin k_x x \sin(\omega t - Kz), \\ H_x &= 2(E_m^+/Z_c) \sin \varphi^+ \sin k_x x \sin(\omega t - Kz), \\ H_z &= -2(E_m^+/Z_c) \cos \varphi^+ \cos k_x x \cos(\omega t - Kz). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Эти выражения описывают волну (рис. 4.13), бегущую вдоль отражающей поверхности в направлении координаты  $z$  с постоянной распространения  $K < k$ , фазовой скоростью  $v_\phi = \omega/K > c$  и длиной волны  $\Lambda = 2\pi/K > \lambda$ . Амплитуда этой волны периодически зависит от расстояния  $x$  над поверхностью металла,

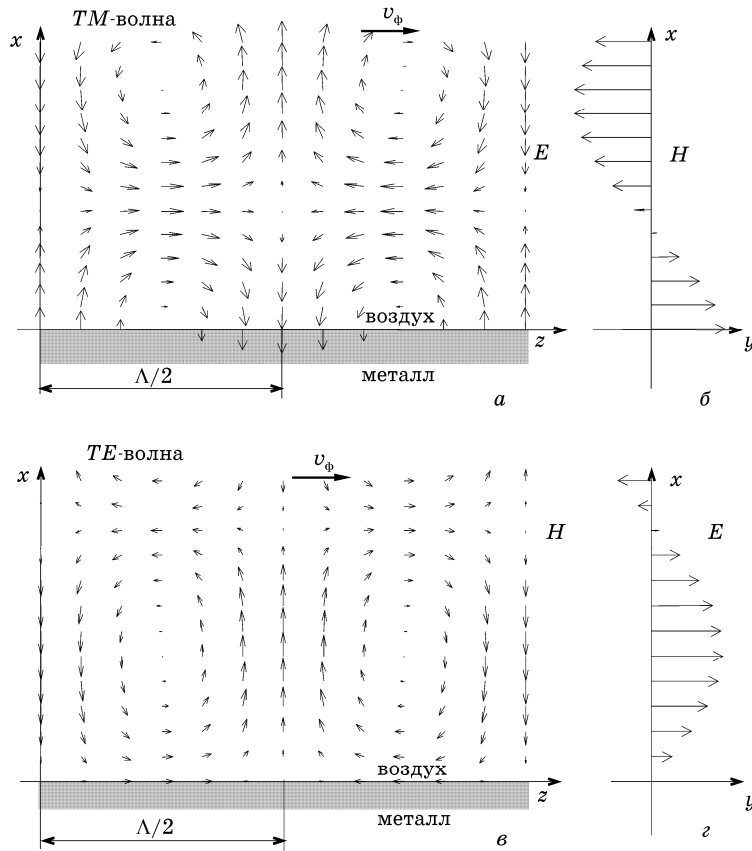


Рис. 4.13. То же, что и на рис. 4.12, но для полного отражения от поверхности идеальной проводящей среды.

что характерно для стоячей волны. На самой поверхности ( $x = 0$ )

соответственно граничным условиям отсутствуют касательные составляющие  $E_z$  и  $E_y$  электрического поля и нормальная проекция  $H_x$  магнитного поля. Здесь размещены узлы для тех составляющих, которые имеют множитель  $\sin k_x x$ . Такие же узлы имеют место на таких расстояниях  $\Delta x$ , где  $k_x x = n\pi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), то есть

$$\Delta x = n\pi/k_x = n\pi/k \cos \varphi^+ = n\lambda/2 \cos \varphi^+ = n\lambda_x/2. \quad (4.49)$$

Посредине между узлами, в точках, где  $\sin k_x x = \pm 1$ , расположены пучности для этих составляющих, где их амплитуды удваиваются. Нормальная составляющая электрического поля  $E_x$  и параллельные составляющие магнитного поля  $H_y$  и  $H_z$ , выражения для которых содержат множитель  $\cos k_x x$ , в этих же точках имеют узлы. Для такой структуры поля местами равных амплитуд являются плоскости  $x = \text{const}$ , а местами равных фаз —  $z = \text{const}$ . Подобные волны называют *неоднородными*, в отличие от плоской волны, которая является *однородной*.

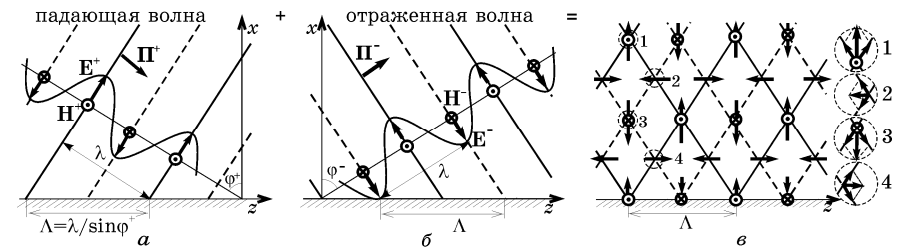


Рис. 4.14. Условное изображение плоских  $TM$ -волн: падающей (а), отраженной (б) и их суперпозиции (в). Точки 1-4 отвечают характерным местам пересечения фронтов и направлениям электрического и магнитного полей (сравнить с рис. 4.13,а).

Очень полезным является представление о неоднородной волне как суперпозиции двух плоских однородных волн. Это следует, во-первых, из того, что формально выражения (4.47) и (4.48) получены как сумма выражений (4.17), (4.18) и соответственно (4.30), (4.31). Во-вторых, это можно показать на примере  $TM$ -волны, изображая падающую (рис. 4.14,а) и отраженную (рис. 4.14,б) волны с помощью чередующихся плоских фронтов. Причем сплошные и штриховые линии соответствуют таким местам, где напряженности поля максимальны, а векторы поля имеют противоположные направления. Суперпозицию этих рисунков надо сделать так (рис. 4.14,в), чтобы на поверхности металла выполнялись соответствующие граничные условия: касательные составляющие электрического поля должны быть противоположными, а магнитного — совпадающими. Суммируя векторы полей для падающей и отраженной волн в характерных точках пересечения

фронтов, получим, что их направления соответствуют рис. 4.13, который построен на основе выражений (4.48). Нетрудно также представить, что с течением времени фронты падающей волны перемещаются вправо-вниз (в направлении падения), отраженной – вправо-вверх, а их суперпозиция – только вправо, вдоль поверхности отражения. Пространственный период, то есть длина этой волны, и соответственно скорость в направлении распространения, как видно из рис. 4.14, больше чем длина волны и скорость в свободном пространстве (в направлении падения или отражения):

$$\Lambda = \lambda / \sin \varphi^+, \quad v_\phi = c / \sin \varphi^+, \quad (4.50)$$

что отвечает формальному соотношению (4.36).

Такое представление позволяет создать некоторую модель, очень полезную для понимания процессов в волноводах. Поставим вопрос, можно ли в пространстве, где распространяется неоднородная волна, разместить идеально проводящую плоскость так, чтобы не нарушить структуру электромагнитной волны. Это можно сделать в тех местах, где будут выполняться такие же граничные условия, как и на отражающей поверхности. Учитывая периодичность структуры поля в перпендикулярном к поверхности направлении, такую плоскость можно разместить параллельно поверхности на расстоянии  $d = \Delta x$  (4.49), кратном полупериоду стоячей волны

$$d = n\lambda / 2 \cos \varphi^+ = n\lambda_x / 2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.51)$$

В отличие от (4.49) здесь в перечне целых чисел, как увидим дальше, может иметь место нулевое значение. В результате получим две отражающие поверхности, которые и образуют так называемый “плоскостной волновод”. Между ними могут распространяться электромагнитные волны со структурами  $TE$ -или  $TM$ -волн, имеющими вид, представленный на рис. 4.13, если не обращать внимание на поля над верхней плоскостью. Эти волны можно представить как плоскую волну, которая, отражаясь поочередно от плоскостей, продвигается вдоль волновода. Угол падения в соответствии с (4.51) зависит от соотношения между длиной волны и расстоянием  $d$ .

Одним из важнейших выводов является то, что в таком волноводе могут распространяться волны с разнообразными конфигурациями полей, или, как их называют, *моды*. Формально они отличаются номером  $n$  и обозначаются  $TE_n$  или  $TM_n$ . Физический смысл номера моды связывают с количеством полупериодов картины распределения поля между плоскостями.

**Пример 4.1.** Какие моды могут существовать между двумя металлическими поверхностями с расстоянием  $d = 2$  см на частоте 30 ГГц?

Прежде всего, исходя из физически возможных значений угла падения, укажем, что  $0 < \cos \varphi^+ < 1$  и каждой моде присуще некоторое минимальное расстояние  $d_{n\min} = n\lambda/2$ ,

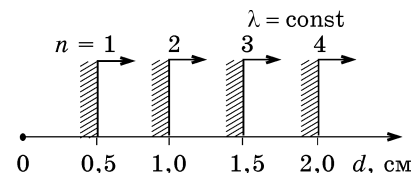


Рис. 4.15. Диаграмма для иллюстрации условий распространения тех или иных мод в “плоскостном” волноводе для заданной длины волны  $\lambda = 1$  см.

такое, что при  $d < d_{n\min}$  распространение данной моды невозможно, так как при этом  $\cos \varphi^+ = 1$ , а  $\varphi^+ = 0$ . Обозначим на числовой оси  $d$  (рис. 4.15) величины  $d_{n\min}$  для разных мод, начиная с  $n = 1$ , при длине падающей волны  $\lambda = c/f = 1$  см ( $d_{1\min} = 0,5$  см,  $d_{2\min} = 1$  см,  $d_{3\min} = 1,5$  см,  $d_{4\min} = 2$  см, ...). На этой же диаграмме символом стрелки вправо отметим область значений  $d$ , при которых данная мода может существовать в таком волноводе. Из нее видно, что при заданном расстоянии 2 см условие распространения моды ( $d > d_{n\min}$ ) будет выполняться только для первых трех мод при углах падения  $\varphi^+ = \arccos(d_{n\min}/d)$ , то есть  $76^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $41^\circ$  соответственно.

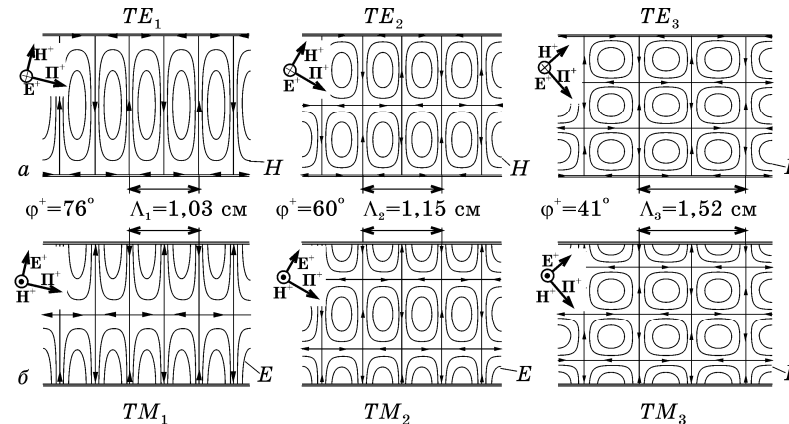


Рис. 4.16. Распределение магнитного поля для первых трех  $TE$ -мод (а) и электрического для  $TM$ -мод (б) в “плоскостном” волноводе при длине падающей волны 1 см и расстоянии между плоскостями 2 см. Каждой моде соответствует свое значение угла падения и длины волны в волноводе.

На рис. 4.16 изображена конфигурация полей для первых трех  $TM$ - и  $TE$ -мод в соответствии с рис. 4.13. Каждая мода имеет свое значение длины волны в волноводе  $\Lambda =$

$\lambda/\sin\varphi^+$ , то есть 1,03, 1,15 и 1,52 см соответственно. Для четвертой моды наблюдается критическая ситуация, когда  $d = d_{4\min}$ ,  $\varphi^+ = 0^\circ$ , а длина волны и фазовая скорость вдоль волновода – бесконечно большие.

Таким образом, из приведенного примера ясно, что при конкретных условиях (длина волны, расстояние) в волноводе может существовать *фиксированное число мод*, для которых выполняется условие  $d > n\lambda/2$ . Наличие в волноводе одновременно нескольких мод – по некоторым причинам нежелательное явление, и в большинстве практических случаев стараются обеспечить условия для распространения только одной моды, или так называемый *одномодовый режим*.

**Пример 4.2.** Для волновода с расстоянием между металлическими пластинами  $d = 2$  см определить условия, при которых будут распространяться волны в виде только одной моды.

Исходя из выражения (4.51) и возможных значений  $\cos\varphi^+$ , запишем условие распространения той или иной моды в виде  $\lambda \ll 2d/n$ . Величину  $2d/n$  естественно считать некоторым предельным значением в условии распространения, поэтому ее называют *критической длиной волны*  $\lambda_{\text{кр}}$ . На числовой оси длин волн (рис. 4.17) отложим значения  $\lambda_{\text{кр}}$  для нескольких первых мод ( $\lambda_{1\text{кр}} = 4$  см,  $\lambda_{2\text{кр}} = 2$  см,  $\lambda_{3\text{кр}} = 1,33$  см,  $\lambda_{4\text{кр}} = 1$  см). В этих же точках поставлены такие же символы, как и на рис. 4.15, – стрелки для обозначения области  $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$ , где  $n$ -я мода может распространяться, и штриховку в области  $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ , где она не может существовать.

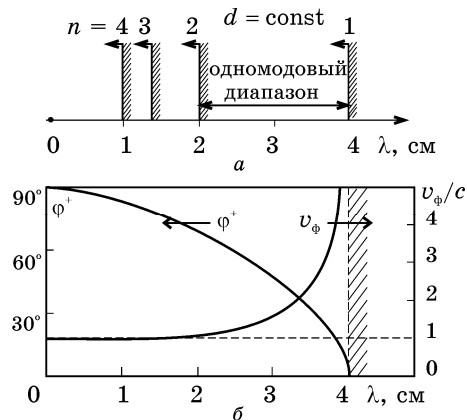


Рис. 4.17. Диаграмма (а), которая иллюстрирует условия распространения разных мод в “плоскостном” волноводе с заданным расстоянием  $d = 2$  см. Первая мода может существовать без примесей других в диапазоне длин волн от 2 до 4 см. Зависимость (б) фазовой скорости и угла падения от длины волны для первой моды.

Из этой диаграммы ясно, что распространение *только одной* моды возможно, если волновод возбуждать на частоте от 7,5 ГГц до 15 ГГц, которой соответствует длина волны  $\lambda_{1\text{кр}} > \lambda > \lambda_{2\text{кр}}$ , то есть от 2 см до 4 см. В этом диапазоне будет выполняться условие распространения только первой моды, которую называют *основной*, а для всех других, или *высших*, волновод будет слишком узким ( $\lambda > 2d/n$ ).

Таким образом, в волноводе *будет распространяться электромагнитная волна в виде только одной моды (основной)*, если её длина волны  $\lambda$  в свободном пространстве будет меньше соответствующей ей критической длины волны, но больше, чем  $\lambda_{\text{кр}}$  ближайшей высшей моды. Надо также помнить, что каждой длине волны  $\lambda$  (частоте) будет соответствовать определенный угол падения (рис. 4.17,б), значение которого можно определить из (4.51) –  $\cos\varphi^+ = \lambda/\lambda_{\text{кр}}$ , длина волны в волноводе  $\Lambda = c/\sin\varphi^+$  и фазовая скорость (4.50):

$$v_\phi = c/\sin\varphi^+ = c/\sqrt{1 - \cos^2\varphi^+} = c/\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2}. \quad (4.52)$$

Это соотношение связывает (рис. 4.17,б) фазовую скорость с длиной волны (частотой) и определяет *закон дисперсии*, который, как увидим дальше, пригоден не только для рассмотренной модели “плоскостного” волновода, но и для многих реальных волноводов.

Вне нашего рассмотрения осталось нулевое значение числа  $n$  в (4.51). На первый взгляд ему соответствует нереальное значение  $d = 0$ . Оказывается, что возможно существование волны с  $n = 0$  при произвольном  $d$ , но при условии падения плоской электромагнитной волны параллельно проводящим плоскостям, то есть при  $\cos\varphi^+ = 0$ . Кроме того, необходимо, чтобы в соответствии с граничными условиями на поверхности идеального металла силовые линии электрического поля были бы перпендикулярными к плоскостям, а магнитного – параллельными. Этому требованию удовлетворяет лишь волна с поляризацией, которая была названа

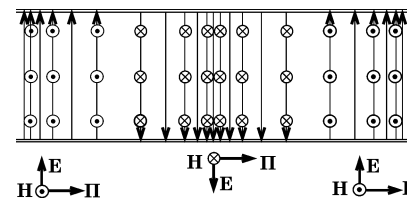


Рис. 4.18. Ориентация векторов поля для плоской волны (моды *ТЕМ*) в “плоскостном” волноводе.

*ТЕ*, при  $\varphi^+ = 90^\circ$  (рис. 4.18). Но в этом случае и электрические и магнитные силовые линии являются только поперечными к направлению распространения, поэтому для такой моды используют обозначение – *ТЕМ*. Характерной особенностью *ТЕМ*-моды является совпадение

параметров волны в волноводе и свободном пространстве ( $v_\phi = c$ ,  $\Lambda = \lambda$ ), так как  $\sin\varphi^+ = 1$  и  $\lambda_{кр} \rightarrow \infty$  независимо от частоты. Это означает, что для *ТЕМ*-моды характерно отсутствие дисперсии.

### 4.3.5. Отражение от поверхности реальных металлов

Особенности отражения электромагнитных волн от поверхности реальных металлов связаны с их электрическими параметрами: комплексным волновым сопротивлением  $\dot{Z}_{см}$  и комплексной постоянной распространения  $\dot{\gamma}_м = k_м - i\alpha_м$ .

**Пример 4.3.** Определить коэффициент отражения волны с частотой  $f = 10$  ГГц от поверхности меди с  $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$  См/м.

Представим волновое сопротивление меди через параметр  $Z_{с0} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  для вакуума, учитывая, что для металлов  $\text{tg}\delta = \sigma/\omega\epsilon\epsilon_0 \gg 1$ . Тогда

$$\dot{Z}_{см} = \sqrt{\mu\mu_0/\epsilon\epsilon_0(1-i\text{tg}\delta)} \approx (1+i)Z_{с0}\sqrt{\omega\mu\epsilon_0/2\sigma}. \quad (4.53)$$

Поскольку  $\omega = 2\pi f$  и для меди  $\mu \approx 1$ , после подстановки численных значений в (4.53) получим, что  $\sqrt{\omega\mu\epsilon_0/2\sigma} \approx 6,9 \cdot 10^{-5}$ . Коэффициент отражения при нормальном падении волны со стороны воздуха (вакуума) на поверхность меди по формуле (4.4) равняется  $\dot{\rho} = [(1+i)6,9 \cdot 10^{-5} - 1] / [(1+i)6,9 \cdot 10^{-5} + 1] \approx -0,9998$ . Для волн оптического диапазона, то есть на частотах порядка  $10^{15}$  Гц, он будет отличаться от  $-1$  во втором знаке.

Из конечной проводимости металлов следует первая особенность – не вся энергия падающей электромагнитной волны отражается, как от поверхности идеального проводника, некоторая часть ее проходит в металл и там поглощается, превращаясь в тепловую. В электронной технике обычно используют металлы с высокой проводимостью и для многих практических случаев, как видно из приведенного примера, отражение можно считать полным, с таким же распределением полей над поверхностью, как и для идеального проводника. Неидеальность обычно надо принимать во внимание, если необходимо рассчитать потери энергии в металлических проводниках.

**Пример 4.4.** Определить угол преломления проходящей волны при известном угле падения для тех же данных, что и в предыдущем примере.

Представим постоянную распространения волны  $\dot{\gamma}_м = k_м - i\alpha_м$  в металле через волновое число  $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  для вакуума, учитывая, что для металлов  $\text{tg}\delta = \sigma/\omega\epsilon\epsilon_0 \gg 1$

$$\dot{\gamma}_м = \omega\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0(1-i\text{tg}\delta)} \approx (1-i)k\sqrt{\sigma\mu/2\omega\epsilon_0}. \quad (4.54)$$

Сравнивая значения волновых чисел в металле (действительная часть  $\dot{\gamma}_м$ ) и в вакууме, видим, что отношение  $k_м/k$  равняется  $\sqrt{\sigma\mu/2\omega\epsilon_0}$ , что для меди на частоте 10 ГГц составляет  $0,7 \cdot 10^4$ . Воспользовавшись законом преломления (4.24), имеем  $\sin\varphi^- = \sin\varphi^+/0,7 \cdot 10^4$  и  $\varphi^- \approx 0$  даже при  $\sin\varphi^+ = 1$ .

Рассмотренный пример иллюстрирует еще одну важную особенность поведения электромагнитных волн возле поверхности реальных металлов: практически независимо от угла падения волна, которая прошла в металл, распространяется *перпендикулярно* к его поверхности. Соответственно в этом же направлении через поверхность существует поток энергии в металл, который задается вектором Пойнтинга  $\mathbf{\Pi}_n$  (рис. 4.19,а). Этот поток обусловлен перпендикулярными к  $\mathbf{\Pi}_n$  и касательными к поверхности составляющими электрического и магнитного полей, что принципиально отличаются от граничных условий на поверхности идеального проводника (пример 1.8). Важным является то, что именно конечная проводимость обуславливает наличие касательной составляющей электрического поля  $E_\tau$  при протекании тока по поверхности металла. Учитывая, что отношение комплексных амплитуд электрического и магнитного полей равняется волновому сопротивлению  $\dot{Z}_{см}$ , и принимая во внимание направления их векторов, можем записать для касательных составляющих:

$$\dot{E}_\tau = \dot{Z}_{см} [\dot{\mathbf{H}}_\tau \times \mathbf{e}_n], \quad (4.55)$$

где  $\mathbf{e}_n$  – орт нормали к поверхности, направленный вглубь металла. Тогда вектор Пойнтинга, определяющий потери в металле, может быть найден через составляющие поля на поверхности

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_n = [\dot{\mathbf{E}}_\tau \times \dot{\mathbf{H}}_\tau^*]/2 = \dot{Z}_{см} [[\dot{\mathbf{H}}_\tau \times \mathbf{e}_n] \times \dot{\mathbf{H}}_\tau^*]/2 = \mathbf{e}_n \dot{Z}_{см} |\dot{H}_\tau|^2/2. \quad (4.56)$$

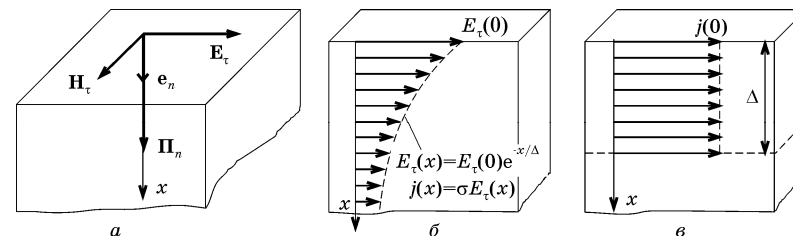


Рис. 4.19. Касательные составляющие  $E_\tau$  и  $H_\tau$  на поверхности реального металла, обусловленные нормальным потоком энергии в металл (а), распределение электрического поля и токов проводимости в толще

металла (б) и эквивалентное представление (в) приповерхностного слоя в виде слоя конечной толщины  $\Delta$  с равномерным распределением тока. Направление оси  $x$  изменено на обратное по сравнению с предыдущими рисунками.

Так как электрическое поле вызывает ток проводимости и нагревание металла, то амплитуды полей затухают по мере распространения волны вглубь металла. Закон убывания  $\exp(-\alpha_m x)$  определяется мнимой частью постоянной распространения  $\dot{\gamma}_m$

$$(4.54) \quad \alpha_m = k\sqrt{\sigma\mu/2\omega\epsilon_0} = \sqrt{\omega\sigma\mu_0/2}. \text{ Плотность тока уменьшается по тому же закону, что и электрическое поле } j(x) = \sigma E_\tau(x) = \sigma E_\tau(0)\exp(-\alpha_m x), \text{ (рис.4.19,б). Если провести интегрирование } j(x) \text{ по всей толще металла } (0 < x < \infty), \text{ то получим результат}$$

$$\int_0^\infty j(x)dx = \sigma E_\tau(0) \int_0^\infty \exp(-\alpha x)dx = \sigma E_\tau(0) / \alpha_m, \quad (4.57)$$

который упрощенно можно представить так, как будто весь ток распределен равномерно с той же плотностью  $j(0) = \sigma E_\tau(0)$ , что и на поверхности (рис. 4.19,в), но только в слое толщиной

$$\Delta = 1/\alpha_m = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}. \quad (4.58)$$

Данное явление рассматривалось в разд. 3.3.3 как скин-эффект и в электронной технике используется для защиты (экранирования) приборов от влияния внешних электромагнитных полей. Для этого толщина металлического экрана должна быть не меньше, чем несколько  $\Delta$ . Обычно считают, что волна полностью поглощается в слое толщиной  $(3...5)\Delta$ .

Для расчета потери мощности на нагревание проводника надо проинтегрировать вектор Пойнтинга  $\Pi_n$  по рассматриваемой поверхности металла  $S$ , тогда

$$P_\tau = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_S \Pi_n dS \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \dot{Z}_{cm} \int_S |\dot{H}_\tau|^2 dS \right] = \frac{1}{2\sigma\Delta} \int_S |\dot{H}_\tau|^2 dS. \quad (4.59)$$

Здесь учтено, во-первых, что вектор  $dS$  имеет направление, совпадающее с  $e_n$ , поэтому  $e_n dS = dS$ ; во-вторых, выражение (4.53) для волнового сопротивления металла с использованием значения для  $\Delta$  имеет вид  $\dot{Z}_{cm} = (1 + i)/\sigma\Delta$ .

Трудность интегрирования (4.59) вызвана прежде всего тем, что нахождение функций распределения полей на поверхности *реального* металла является очень трудной задачей даже для относительно простых случаев. Для упрощения обычно принимают так называемые *приближенные граничные условия Шуккина-*

*Леонтовича*, в соответствии с которыми считают, что потери в реальном металле несущественно влияют на конфигурацию магнитного и нормальную составляющую электрического поля возле его поверхности, а касательная составляющая электрического поля может быть рассчитана подобно (4.55)

$$\dot{E}_\tau = \dot{Z}_{cm} \left[ \dot{H}_\tau^{(0)} \times e_n \right], \quad (4.60)$$

но здесь используют значение магнитного поля  $\dot{H}_\tau^{(0)}$  на поверхности *идеального* проводника. Соответственно при расчетах тепловых потерь в интеграл (4.59) подставляют распределение  $|\dot{H}_\tau^{(0)}|^2$ , найденное для идеального случая.

В заключение обратим внимание на один параметр, который широко используется в практике, – *поверхностное сопротивление*  $R_s$ . Это есть сопротивление параллелепипеда толщиной  $\Delta$ , верхняя грань которого лежит на поверхности металла и имеет форму квадрата с *единичными* сторонами. Используя известную формулу для сопротивления, можно показать, что его сопротивление  $R_s = 1/\sigma\Delta$ . Фактически, с учетом скин-эффекта, это есть сопротивление столбика бесконечной вглубь металла толщины с квадратным основанием на поверхности и током, который протекает в приповерхностном слое. Интересно, что это сопротивление не зависит от размера квадратного участка, так как оно пропорционально длине и обратно пропорционально ширине.