

3. ЗМІННІ ПОЛЯ. ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ

3.1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

3.1.1. Рівняння Максвелла у комплексній формі

Дуже часто властивості електронних кіл вивчаються стосовно гармонічних процесів. В тих випадках, коли дія не є гармонічною, її подають як дискретну (ряд Фур'є) або неперервну (інтеграл Фур'є) суму гармонік і поведінку кожної гармоніки вивчають незалежно. Таке подання можливе, якщо пристрій, що вивчається, є лінійним, тобто описується лінійним алгебраїчним або диференціальним рівнянням.

Переваги такого способу пов'язані з можливістю використання методу комплексних амплітуд, суть якого полягає ось у чому. Будь-яка фізична величина, яка змінюється за гармонічним законом $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ замінюється у вихідних рівняннях її символічним зображенням у вигляді комплексної величини $\dot{a} = A_m \exp(i\omega t + \varphi_0) = \dot{A} \exp(i\omega t)$ і рівняння розв'язуються тільки для комплексних амплітуд $\dot{A} = A_m e^{i\varphi_0}$, оскільки часовий множник $\exp(i\omega t)$, який входить в усі члени рівняння, скорочується. Для відновлення правильної відповіді після розв'язання необхідно від одержаного розв'язку залишити тільки дійсну частину. Одна з переваг методу комплексних амплітуд при розв'язку диференціальних рівнянь у частинних похідних полягає у зменшенні кількості незалежних змінних, тому що $\partial \dot{a} / \partial t = i\omega \dot{a}$.

Отже, щоб записати рівняння Максвелла (1.2) у комплексній формі, замінюємо всі змінні відповідними комплексними амплітудами, а диференціювання по часу – множенням на $i\omega$. Якщо при цьому в першому рівнянні замість густини струму підставити його значення з (1.3), одержимо

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} &= i\omega \dot{\epsilon} \epsilon_0 \dot{\vec{E}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} &= -i\omega \dot{\mu} \mu_0 \dot{\vec{H}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тут $\dot{\epsilon} = \epsilon - i\sigma/\omega\epsilon_0$. Величина $\dot{\epsilon}$, яка називається *комплексною діелектричною проникністю*, не має в цілому якого-небудь фізичного змісту, а введена заради зручності й симетрії у запису рівнянь Максвелла. Можна її записати так:

$$\dot{\epsilon} = \epsilon(1 - i\sigma/\omega\epsilon_0) = \epsilon(1 - i\operatorname{tg}\delta). \quad (3.2)$$

Величина $\operatorname{tg}\delta$ називається *тангенсом кута діелектричних втрат*, за своїм фізичним змістом вона дорівнює відношенню струму провідності в середовищі до струму зміщення і є досить важливим електричним параметром, значення якого для різних речовин наводяться у довідниках. Значення $\operatorname{tg}\delta$ може служити основою для класифікації речовини. Так, якщо $\operatorname{tg}\delta \ll 1$, то переважаючими у речовині будуть струми зміщення, і вона є гарним діелектриком. Якщо $\operatorname{tg}\delta \gg 1$, то таку речовину відносять до провідників, тому що в ній можуть протікати практично тільки струми провідності.

Для подальшого використання запишемо векторні рівняння Максвелла (1.32) в проєкціях на осі прямокутної системи координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= -i\omega \dot{\epsilon} \epsilon_0 \dot{E}_x; & \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= i\omega \dot{\mu} \mu_0 \dot{H}_x; \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= -i\omega \dot{\epsilon} \epsilon_0 \dot{E}_y; & \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= i\omega \dot{\mu} \mu_0 \dot{H}_y; \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= -i\omega \dot{\epsilon} \epsilon_0 \dot{E}_z; & \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= i\omega \dot{\mu} \mu_0 \dot{H}_z; \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для опису гармонічних процесів цілком достатньо лише двох рівнянь (3.1) у комплексній формі. Так, якщо застосувати оператор div до обох частин другого з цих рівнянь і врахувати тотожність $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) \equiv 0$, одержимо четверте рівняння Максвелла як наслідок другого. Аналогічно з першого рівняння можна одержати, що $\operatorname{div}(\dot{\epsilon} \epsilon_0 \dot{\vec{E}}) \equiv 0$. Це відповідає третьому рівнянню Максвелла для середовища без просторового заряду. Може постати питання, чи не протирічить це третьому рівнянню Максвелла, яке безпосередньо для комплексних амплітуд має вигляд

$$\operatorname{div}(\dot{\epsilon} \epsilon_0 \dot{\vec{E}}) = \dot{\rho},$$

де величина $\dot{\rho}$ є дійсною. Якщо тут замінити $\dot{\rho}$ з рівняння неперервності у комплексній формі

$$i\omega \dot{\rho} + \operatorname{div} \dot{\vec{j}} = 0 \quad (3.4)$$

та врахувати $\dot{\vec{j}} = \sigma \dot{\vec{E}}$, то одержимо

$$\operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0 + \sigma/i\omega)\dot{\mathbf{E}} = \operatorname{div}(\dot{\varepsilon}\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}) = 0,$$

де діелектрична провідність ε вже комплексною. Отже, незалежними з усіх чотирьох рівнянь Максвелла (для гармонічних полів) є тільки перші два.

3.1.2. Граничні умови

Подання рівнянь Максвелла у комплексній формі вимагає відповідної корекції комплексної форми запису граничних умов. Співставивши рівняння (1.2) та (1.32), неважко здогадатися, що комплексну форму запису граничних умов можна одержати безпосередньо з (1.13) – (1.16), формально поклавши в них $\rho = 0$ та $j = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{D}_{1n} &= \dot{D}_{2n}, & \dot{E}_{1\tau} &= \dot{E}_{2\tau}, \\ \dot{B}_{1n} &= \dot{B}_{2n}, & \dot{H}_{1\tau} &= \dot{H}_{2\tau}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Треба тільки пам'ятати, що вектор $\dot{\mathbf{D}}$ включає комплексну діелектричну проникність $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\varepsilon}\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}$.

3.1.3. Рівняння балансу енергії

Рівняння балансу енергії у диференціальній формі (1.11) або в інтегральній формі (1.12) записані для миттєвих значень і не є лінійними щодо амплітуд полів. Тому, строго кажучи, для них не можна використовувати метод комплексних амплітуд, безпосередньо замінюючи миттєві значення їх комплексними амплітудами. Дійсно, якщо поля змінюються за гармонійним законом: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_m(\mathbf{r})\cos\omega t$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_m(\mathbf{r})\cos(\omega t + \varphi)$, то миттєве значення вектора Пойнтінга

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r})] \cos\omega t \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.6)$$

Використовуючи тотожні тригонометричні перетворення, можна представити

$$\cos\omega t \cos(\omega t + \varphi) = [\cos\varphi (1 + \cos 2\omega t) - \sin\varphi \sin 2\omega t]/2.$$

Цей вираз показує, що в спектрі миттєвих значень вектора Пойнтінга присутня деяка постійна складова, пропорційна $\cos\varphi$, і дві змінні, що змінюються з подвоєною частотою 2ω . Друга з них, пропорційна $\sin\varphi$ і відмінна від 0, якщо між змінами електричного і магнітного поля існує часовий фазовий зсув, відповідає так званій *реактивній* потужності. Частина, що містить

$\cos\varphi$ і максимальна при $\varphi = 0$, відповідає *активній* потужності. Вона містить складову, що не лише коливається з подвоєною частотою, але і деяку постійну, яка і відповідає за перенесення енергії. Її значення можна знайти, якщо вектор Пойнтінга (3.6) усереднити за період коливаний:

$$\mathbf{P}_{\text{cp}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) dt = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r})] \cos\varphi. \quad (3.7)$$

Решта всіх доданків обертається в 0.

Якщо використовувати метод комплексних амплітуд, замінюючи $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ на $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, а $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ на $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, де для даного випадку $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = H_m(\mathbf{r})e^{i\varphi}$, то такий же результат можна отримати наступним способом. Вводячи поняття *комплексного вектора Пойнтінга*

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*], \quad (3.8)$$

легко показати, що його дійсна частина відповідає середньому потоку активної потужності

$$\operatorname{Re} \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_{\text{cp}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r})] \cos\varphi, \quad (3.9)$$

а уявна частина

$$\operatorname{Im} \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_r = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r})] \sin\varphi \quad (3.10)$$

дорівнює амплітуді реактивної потужності, що коливається.

Отримати з рівнянь Максвелла відповідне рівняння балансу для комплексної потужності можна з рівнянь (3.1) подібно до того, як це робилося при виводі (1.11). З другого рівняння (3.1), скалярно помноженого на $\dot{\mathbf{H}}^*$, віднімемо рівняння, комплексно спряжене першому і скалярно помножене на $\dot{\mathbf{E}}$. При цьому праву частину першого не об'єднуємо для введення комплексної діелектричної проникності. У результаті отримуємо вираз

$$\dot{\mathbf{H}}^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* = -i\omega \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{H}}^* + i\omega \dot{\mathbf{D}}^* \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{j}}^* \dot{\mathbf{E}}.$$

Ліва частина є $\text{div}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] = 2 \text{div} \dot{\mathbf{P}}$, а в правій частині $\dot{\mathbf{H}}^* = \mu\mu_0 |\dot{H}|^2 = 2w_H$ відповідає подвоєній об'ємній густині магнітної енергії, $\dot{\mathbf{D}}^* \dot{\mathbf{E}} = \varepsilon\varepsilon_0 |\dot{E}|^2 = 2w_E$ – подвоєній об'ємній густині електричної енергії, а $\mathbf{j}^* \dot{\mathbf{E}} = \sigma |\dot{E}|^2$ – усередненій за період подвоєній густині потужності втрат на нагрівання. У результаті рівняння балансу енергії у комплексній формі можна представити у вигляді

$$\text{div} \dot{\mathbf{P}} + i\omega(w_H - w_E) + \mathbf{j}^* \dot{\mathbf{E}} / 2 = 0. \quad (3.11)$$

Для переходу до інтегральної форми помножимо всі доданки (3.11) на dV і проінтегруємо за об'ємом V . Використовуючи теорему Остроградського-Гаусса для заміни інтеграла за об'ємом від дивергенції вектора Пойнтінга на інтеграл по замкнутій поверхні S , що оточує цей об'єм, отримаємо

$$\oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} + i\omega \int_V (w_H - w_E) dV + \int_V \mathbf{j}^* \dot{\mathbf{E}} dV = 0. \quad (3.12)$$

Як вже наголошувалося у розд. 1.4, для спрощення аналізу балансу енергії, пов'язаної з різними видами її перетворення, часто використовують поняття *сторонніх джерел*. Врахувати їх вплив можна, вводячи у третій доданок $\dot{\mathbf{j}}_{\text{ст}}$, або $\dot{\mathbf{E}}_{\text{ст}}$ залежно від моделі джерела. Але формально найпростіше у правій частині (3.12) поставити комплексну потужність сторонніх джерел.

Сенс доданків у рівнянні балансу енергії простіше зрозуміти, якщо (3.12) представити окремо для дійсних і уявних частин

$$\text{Re} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} + \frac{\sigma}{2} \int_V |\dot{E}|^2 dV = \text{Re} \dot{P}_{\text{ст}}, \quad (3.13)$$

$$\text{Im} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} + \omega \int_V (w_H - w_E) dV = \text{Im} \dot{P}_{\text{ст}}. \quad (3.14)$$

Ці вирази є рівняннями балансу для середньої за період активної і амплітуди коливань реактивної потужності. Якщо, наприклад, джерело знаходиться усередині даного об'єму, то його активна потужність витрачається на нагрівання провідного середовища, і (або) на створення потоку вектора Пойнтінга назовні. Якщо втрати на нагрівання відсутні, то вся потужність

джерела йде на випромінювання. Реактивна потужність джерела також може виходити з об'єму (перший доданок в 3.14) і запасатися у вигляді енергії полів (другий доданок). Якщо в об'ємі відсутнє джерело, то втрати на нагрівання визначають різницю вхідних і вихідних потоків активної потужності. У енергетично ізолюваному об'ємі поля можуть існувати за відсутності джерела і втрат, їх реактивна енергія коливатиметься з подвоєною частотою. Різні знаки перед w_E і w_H показують, що запасена реактивна енергія переходить з енергії електричного поля в енергію магнітного і навпаки.

3.2. ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ. ХВИЛЬОВА ФУНКЦІЯ.

3.2.1. Хвильові рівняння – наслідки рівнянь Максвелла

Заслуга Максвелла полягала в тому, що ним було введено поняття струму зміщення, що дозволило об'єднати раніш незалежні співвідношення теорії електромагнетизму в єдину систему рівнянь – рівняння Максвелла. Наслідки цього можна уявити, розглядаючи структуру перших двох рівнянь (3.2). Припустимо, що струмом провідності, який протікає у деякому середовищі, збуджується вихрове магнітне поле (відповідно до першого рівняння 1.2,а). Якщо струм змінюється в часі, так само змінюється й магнітне поле, яке збуджує (відповідно до другого рівняння 1.2,б) вихрове електричне поле. Але змінне електричне поле викликає струм зміщення, який, як і струм провідності, в свою чергу приводить до збудження вихрового магнітного поля. Таким чином, процес взаємного збудження полів, почавшись, може продовжуватися як завгодно довго у часі і передаватися у просторі. Подібні процеси називають хвильовими. Для більш глибокого розуміння суті й властивостей хвиль зробимо деякі формальні перетворення. Розглядаючи поки що для спрощення середовище без вільних зарядів ($\rho = 0$, $j = 0$), подіємо оператором rot на обидва рівняння Максвелла:

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{H}) = \varepsilon\varepsilon_0 \partial(\text{rot} \mathbf{E}) / \partial t; \quad \text{rot}(\text{rot} \mathbf{E}) = -\mu\mu_0 \partial(\text{rot} \mathbf{H}) / \partial t.$$

Підставляючи у праву частину $\text{rot} \mathbf{E}$ і $\text{rot} \mathbf{H}$ з перших двох рівнянь Максвелла і враховуючи тотожність $\text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) = \text{grad} \text{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$, в якій треба прийняти $\text{div} \mathbf{A} = 0$ відповідно до третього й четвертого рівнянь Максвелла, одержуємо розділення системи на два незалежних рівняння другого порядку:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 = 0;$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial^2 \mathbf{H} / \partial t^2 = 0. \quad (3.15)$$

Рівняння такого типу в математичній фізиці називають *хвильовими*. Уявлення про те, що таке хвиля, можна одержати, розглядаючи для спрощення одновимірне хвильове рівняння для деякої скалярної функції $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3.16)$$

Безпосередньою підстановкою можна впевнитися, що розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u(x, t) = C^+ f(x - vt) + C^- f(x + vt), \quad (3.17)$$

де конкретний вид функції f не має значення, вона тільки має бути такою, що двічі диференціюється. Визначальною тут є структура аргументу, куди входять координата і час у вигляді лінійної комбінації.

Функції типу $f(x \pm vt)$, точніше будь-які функції аргументу $(x \pm vt)$, математично описують такі процеси, які називають *хвилями*. Щоб уявити характер цих функцій, згадаємо, що функція $f(x - a)$ повторює вигляд функції $f(x)$, але зсунута вправо на величину a .

На рис. 3.1 зображені дві "фотографії" деякої функції $f(x - vt)$, зроблені через проміжок часу Δt . Вони відрізняються лише тим, що всі точки другої кривої зсунуті у бік більших значень x на величину $\Delta x = v\Delta t$. Тому з часом вся функція зміщується вправо зі швидкістю $v = \Delta x / \Delta t$. Стосовно до гармонічних хвильових процесів, коли може бути введене поняття фази, ця швидкість називається фазовою. Легко уявити,

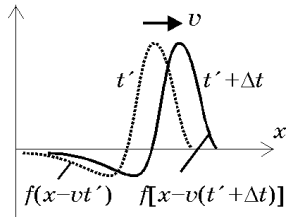


Рис. 3.1. Запізнювання функції $f(x - vt)$ обумовлено структурою аргумента

що функція $f(x + vt)$ описує процес, який розповсюджується із швидкістю v у напрямку, зворотньому до осі x . Отже доданки у виразі (3.17) – це *пряма і зворотня хвилі*. Якщо розглядати поширення хвиль по відношенню до джерела їх збудження, то звичайно використовують терміни "падаюча" і "відбита" хвиля.

Фізична природа такої структури аргументу $(ax + bt)$, що включає лінійну комбінацію координати і часу, пов'язана з

скінченною швидкістю поширення і, відповідно, із *запізнюванням*. Дійсно, якщо в точці $x = 0$ сформована якась часова функція $f(t)$, то в точці на відстані x вона буде за формою такою ж $f(t')$, але зсунутою у часі: $t' = t - \Delta t$. Оскільки запізнювання $\Delta t = x/v$ визначається відстанню і швидкістю поширення, то в аргументі хвильових функцій з'являється координата, пропорційна запізнюванню.

Вирази (3.17) описують так звані незгасні хвилі. Якщо хвиля згасає або зростає в просторі, замість сталих інтегрування C^\pm використовують відповідні координатні функції, які характеризують закон змінення. Такою ситуація буде, як ми побачимо далі, наприклад, у середовищі із скінченим значенням питомої електропровідності.

3.2.2. Гармонічні хвилі. Основні параметри

У електронній техніці часто мають справу з гармонічними хвильовими процесами, які описують хвильовими функціями аргументу $\omega(t \pm x/v_\phi) = \omega t \pm kx$, який називають *фазою хвилі*, що включає часову ωt і просторову kx частини:

$$u(x, t) = C^+ \frac{\sin(\omega t - kx + \phi_0^+)}{\cos(\omega t - kx + \phi_0^+)} + C^- \frac{\sin(\omega t + kx + \phi_0^-)}{\cos(\omega t + kx + \phi_0^-)}. \quad (3.18)$$

Подвійний запис тут означає, що можна обирати будь-яку з функцій. Залежно від цього будуть ті або інші значення початкових фаз ϕ_0^\pm для падаючої і відбитої хвилі.

Характерні параметри гармонічних хвиль:

ω – кругова частота часових коливань, що показує зміну фази за одиницю часу;

$k = \omega/v_\phi$ – фазова постійна поширення або хвильове число, що характеризує зміну фази хвилі на одиниці довжини;

v_ϕ – фазова швидкість, тобто швидкість поширення точок з даною фазою. Якщо ввести поняття *фронту хвилі*, як сукупності точок з однаковою фазою, то швидкість переміщення фронту визначатиметься фазовою швидкістю.

Параметри хвилі ω і k пов'язані з *часовим періодом* T і *просторовим періодом* λ (довжина хвилі) однотипними співвідношеннями $\omega = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$. Треба відмітити, що хвиля є періодичною функцією двох незалежних аргументів – координати і часу. В цьому випадку необхідно говорити і про два *незалежні періоди* – просторовий (λ) і часовий (T). Проте, для більшості реальних фізичних процесів між ними зазвичай існує

деякий внутрішній зв'язок, який викликаний наявністю *дисперсії*, що виявляється у залежності фазової швидкості від частоти $v_{\phi}(\omega)$.

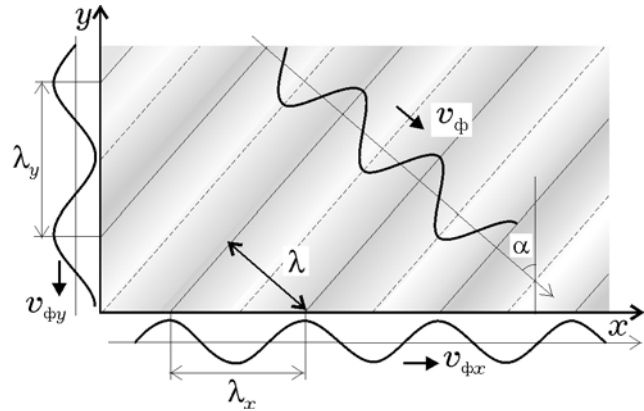


Рис. 3.2. При похилому падінні хвилі відносно деякого напрямку довжина хвилі і фазова швидкість більші за відповідні значення у вільному просторі (вздовж напрямку поширення)

У випадках, коли напрямок розповсюдження не співпадає з жодною з координатних осей, хвильові функції мають аргумент $\omega t \pm \mathbf{k}\mathbf{r}$. Тут $\mathbf{k} = \mathbf{e}_x k_x + \mathbf{e}_y k_y + \mathbf{e}_z k_z$ – хвильовий вектор, який має довжину, що дорівнює хвильовому числу, і напрямок, який співпадає з напрямком розповсюдження хвилі або з вектором фазової швидкості; \mathbf{r} – радіус-вектор. Оскільки $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, можна ввести поняття хвильових чисел вздовж координатних осей, які дорівнюють проекціям вектора \mathbf{k} на ці вісі. Їм відповідають довжини хвиль $\lambda_{x,y,z} = 2\pi/k_{x,y,z}$, які відраховуються вздовж напрямку координатних осей. Це схематично зображено на рис.3.2, де суцільними лініями показані „гребені” хвиль, а штриховими „западни”. Ясно, що довжина хвилі в будь-якому з напрямків не менша довжини хвилі, що відраховується вздовж напрямку розповсюдження. Аналогічно можна ввести поняття фазової швидкості вздовж того чи іншого напрямку: $v_{\phi i} = \omega/k_i$, ($i = x, y, z$) причому ця швидкість *завжди не менша* за фазову швидкість вздовж напрямку розповсюдження хвилі. В окремому випадку, коли хвиля розповсюджується перпендикулярно до якого-небудь напрямку, фазова швидкість й довжина хвилі вздовж нього нескінченно великі.

3.2.3. Групова швидкість

Поняття групової швидкості зазвичай зв'язують із швидкістю переміщення у просторі максимуму «огинаючої» так званого «хвильового пакету» (рис. 3.3), за допомогою якого передається деякий сигнал. Всі сигнали можуть бути представлені або дискретною (ряд Фур'є), або безперечною (інтеграл Фур'є) сумою простих гармонійних складових. З цілого ряду причин при поширенні електромагнітних хвиль спостерігається явище дисперсії, через що фазова швидкість окремих частотних складових буде різною. Це приведе до того, що форма пакету змінюватиметься при його переміщенні у просторі, і різні точки огинаючої переміщатимуться з різною швидкістю.

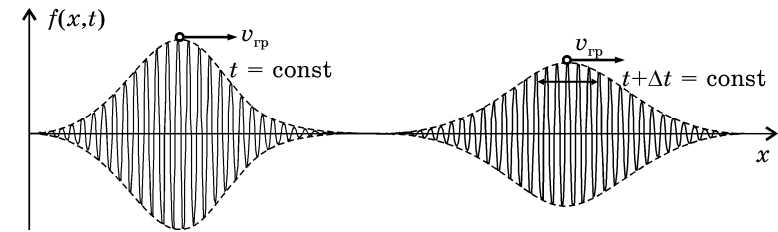


Рис. 3.3. Групова швидкість визначається швидкістю зміщення функції, що огинає «хвильовий пакет»

Для більш коректного визначення групової швидкості розглянемо найпростіший «хвильовий пакет», що складається з двох гармонійних хвильових процесів з близькими значеннями частоти і хвильового числа, віддаленими від деякого середнього значення на $\Delta\omega$ і Δk відповідно:

$$a(x, t) = A_{m1} \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x] + A_{m2} \cos[(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x].$$

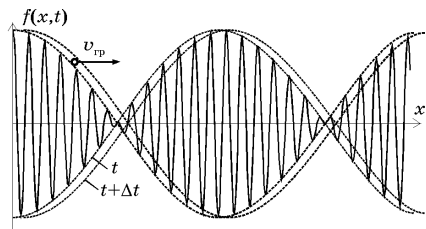
Простими тригонометричними перетвореннями такий пакет можна представити (для спрощення прийемо амплітуди рівними) у вигляді:

$$a(x, t) = 2A_m \cos(\Delta\omega t - \Delta kx) \cos(\omega t - kx). \quad (3.19)$$

Такий процес, подібний до «биття» двох гармонійних коливань, можна представити (рис. 3.4) як деяку хвилю з хвильовим множником $\cos(\omega t - kx)$, тобто з середніми параметрами ω і k . Косинус, що стоїть при амплітуді, можна розглядати як функцію, що визначає огинаючу даного хвильового пакету. Але ця огинаюча також є хвильовим процесом з

параметрами $\Delta\omega$ і Δk , який переміщується з часом у просторі з швидкістю $\Delta\omega/\Delta k$. Ця величина і приймається як швидкість «пакету», тобто групова швидкість.

Можна показати, що для складніших сигналів, які представляються як безперервна сума гармонійних (інтеграл Фур'є), групова швидкість визначається відношенням нескінченно малих приростів $d\omega$ і dk , або похідною



$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (3.20)$$

Для знаходження групової швидкості необхідно знати закон дисперсії, який представляється як залежність між ω і k , або у вигляді залежності фазової швидкості від частоти.

Рис. 3.4. Огинаюча групи з двох гармонічних хвиль представляє собою хвилю з параметрами $\Delta\omega$ і Δk

3.3. ПЛОСКА ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ХВИЛЯ В ОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ.

3.3.1. Розв'язок хвильових рівнянь

Повертаючись до електромагнітних хвиль, треба відмітити, що відповідно до рівняння (3.15) вектори електричного й магнітного полів будуть розповсюджуватись у вигляді незгасних хвиль (для середовища без вільних зарядів) із швидкістю $v = 1/\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}$, яка залежить від параметрів середовища.

Якщо проробити процедуру, аналогічну виведенню рівнянь (3.15), але над рівняннями Максвелла в комплексній формі, то для комплексних амплітуд векторів електричного й магнітного поля одержимо:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \gamma^2 \mathbf{E} = 0; \quad \nabla^2 \mathbf{H} + \gamma^2 \mathbf{H} = 0, \quad (3.21)$$

Ці рівняння за формою співпадають з (3.1), якщо в останніх прийняти $\partial/\partial t = i\omega$, $\partial^2/\partial t^2 = -\omega^2$, але треба звернути увагу на те, що прийняте при виведенні (3.15) спрощення про відсутність вільних зарядів тут не має місця, тому що втрати в середовищі враховуються в комплексній діелектричній проникності. Величина

$$\gamma = \omega\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} = k - i\alpha, \quad (3.22)$$

що введена як позначення, називається *комплексною сталою поширення* електромагнітної хвилі. Дійсна її частина – хвильове число, а уявна характеризує згасання хвилі.

Як найпростішу модель електромагнітного хвильового процесу розглянемо *плоску хвилю*, що розповсюджується в однорідному середовищі. Така назва пов'язана із назвою *фронт хвилі*, тобто поверхні, всі точки якої мають однакову фазу. Ця модель важлива для розуміння загальних властивостей та параметрів електромагнітних хвиль, незважаючи на те, що вона є ідеалізацією реальних хвиль. Дійсно, звичайно електромагнітні хвилі ближчі до сферичних (рис. 3.5), що розходяться радіально від джерела і для обмеженої області простору можна вважати фронт хвилі плоским і прийняти $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$. Для кількісного аналізу виберемо напрямок осі z , співпадаючим із напрямком розповсюдження хвилі або із напрямком вектора Пойнтінга. Оскільки $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$, то $E_z = H_z = 0$ і вектори \mathbf{E} та \mathbf{H} лежать у поперечній площині. Обмежуючи розгляд гармонічними процесами, скористаємося рівняннями Максвелла у комплексній формі для проєкцій на координатні вісі (3.3):

$$\begin{cases} dH_y/dz = -i\omega\epsilon\epsilon_0 E_x, & dH_x/dz = i\omega\epsilon\epsilon_0 E_y, \\ dE_x/dz = -i\omega\mu\mu_0 H_y, & dE_y/dz = i\omega\mu\mu_0 H_x. \end{cases} \quad (3.23)$$

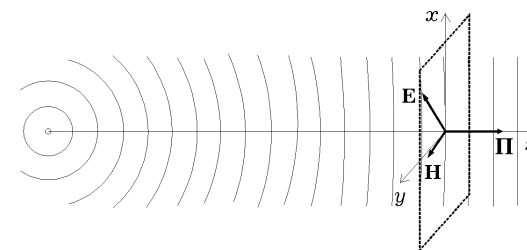


Рис. 3.5. На значній відстані від джерела та в обмеженій області простору фронт хвилі можна вважати плоским

Як бачимо, рівняння розділяються на дві незалежні системи: одна – для проєкцій E_x і H_y , друга – для E_y і H_x . Це означає, по-перше, що їх розв'язки можна розглядати незалежно; по-друге, вибираючи напрямок осі x , співпадаючим з напрямком силових ліній електричного поля ($E_x = E$, $E_y = 0$), автоматично

одержуємо нульовий розв'язок для другої системи ($H_x = 0$, $H_y = H$). Тому

$$\begin{cases} d\dot{H} / dz = -i\omega\epsilon\epsilon_0\dot{E}, \\ d\dot{E} / dz = -i\omega\mu\mu_0\dot{H}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Прийняте припущення про сталість напрямку вектора E обмежує розгляд випадком так званої лінійно поляризованої хвилі. Можна точно довести, що вектори E і H завжди перпендикулярні один до одного незалежно від типу хвилі.

Для розв'язання останньої системи рівнянь необхідно розділити змінні. Це досягається диференціюванням кожного рівняння і підстановкою замість перших похідних їх значень з (3.24). З урахуванням позначення (3.22) одержимо рівняння

$$d^2\dot{E} / dz^2 + \gamma^2\dot{E} = 0, \quad d^2\dot{H} / dz^2 + \gamma^2\dot{H} = 0,$$

які тотожні хвильовим рівнянням (3.21) для одновимірного випадку ($\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$). Їх розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}^+ e^{-i\dot{\gamma}z} + \dot{E}^- e^{i\dot{\gamma}z}, \\ \dot{H} &= \dot{H}^+ e^{-i\dot{\gamma}z} - \dot{H}^- e^{i\dot{\gamma}z}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тут E^\pm і H^\pm – сталі інтегрування, що грають роль комплексних амплітуд хвиль, кількість яких збільшилась до чотирьох у результаті підвищення порядку вихідних рівнянь. Для зменшення їх кількості підставимо (3.25) в одне з рівнянь (3.24) і, враховуючи рівність коефіцієнтів при однакових функціях, одержимо:

$$\frac{E^+}{H^+} = \frac{E^-}{H^-} = \frac{\dot{\gamma}}{\omega\epsilon\epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} = Z_c. \quad (3.26)$$

Ця величина, що дорівнює відношенню амплітуди електричного поля до амплітуди магнітного поля для кожної з хвиль, називається *хвильовим опором середовища*. Для вакууму $Z_c = 120\pi \approx 377$ Ом. Використовуючи (3.26), можна записати:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}^+ e^{-i\dot{\gamma}z} + \dot{E}^- e^{i\dot{\gamma}z}, \\ \dot{H} &= (\dot{E}^+ e^{-i\dot{\gamma}z} - \dot{E}^- e^{i\dot{\gamma}z}) / Z_c. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Якщо врахувати, що $\dot{\gamma}$ – величина комплексна, і підставивши (3.22) у вираз (3.27), одержимо

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}^+ e^{-\alpha z} e^{-ikz} + \dot{E}^- e^{\alpha z} e^{ikz}, \\ \dot{H} &= (\dot{E}^+ e^{-\alpha z} e^{-ikz} - \dot{E}^- e^{\alpha z} e^{ikz}) / Z_c. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Для відновлення дійсних значень необхідно вираз для комплексних амплітуд (3.28) помножити на $e^{i\omega t}$ і взяти дійсну частину. В результаті для електричного поля (аналогічно для магнітного) одержимо

$$\begin{aligned} E &= \text{Re}(\dot{E} e^{i\omega t}) = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz + \varphi_0^+) + \\ &+ E_m^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + kz + \varphi_0^-). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Тут φ_0^+ і φ_0^- – початкові фази, що залежать від вибору початку відліку часу та (або) координати.

Графіки цих функцій для двох фіксованих моментів часу, що відрізняються на Δt , це гармонічні функції (рис. 3.5), амплітуди яких змінюються вздовж координати x за експоненціальним законом: спадають для падаючої хвилі (рис. 3.5, а) й зростають для відбитої (рис. 3.5, б), тобто згасають вздовж напрямку їх розповсюдження. Величина α визначає швидкість згасання і називається *коефіцієнтом згасання*.

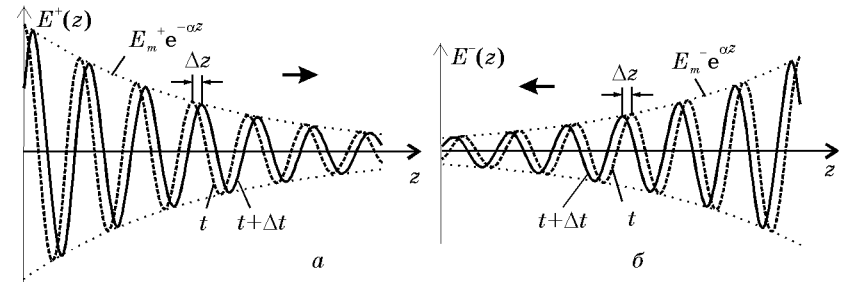


Рис. 3.6. Миттєві значення прямої (а) та зворотньої (б) хвилі для фіксованих моментів часу. Амплітуди хвиль згасають у напрямку їх поширення

Цілком природньо, що в однорідному середовищі може розповсюджуватися хвиля тільки від джерела збудження. Формально це досягається вибором сталої інтегрування $E_m^- = 0$.

Крім того, вибором початку відліку завжди можна отримати початкову фазу $\varphi^+ = 0$. Тому для однорідного й нескінченного середовища

$$E = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz)$$

$$H = (E_m^+ / |Z_c|) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz - \varphi_z);$$

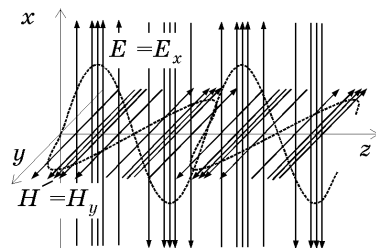


Рис. 3.7. Просторовий розподіл електричного та магнітного полів. Значення напруженості поля пропорційні густині силових ліній

де $|Z_c|$ і φ_z – відповідно модуль і фаза комплексного значення хвильового опору середовища.

Для середовища без втрат ($\text{tg}\delta = 0$) хвильовий опір – величина дійсна і вектори \mathbf{E} і \mathbf{H} змінюються у часі і просторі синфазно (рис.3.7). У середовищі з втратами змінювання \mathbf{H} відстають по фазі від \mathbf{E} тим більше, чим більші втрати.

3.3.2. Поляризація електромагнітних хвиль

Поляризація електромагнітної хвилі – її властивість, пов'язана з просторовою орієнтацією векторів поля. Зазвичай як напрям поляризації вибирають орієнтацію вектора електричного поля.

При розгляді моделі плоскої електромагнітної хвилі у попередньому розділі ми вибрали напрям осі x уздовж вектора електричного поля, передбачаючи, що його орієнтація не змінюється у просторі, і він завжди розташований у площині xOz . Ця ситуація відповідає *лінійній* поляризації, а якщо вісь x стосовно природного простору направлена вертикально, то говорять про *вертикальну* поляризацію (рис. 3.8, *a*).

Якщо напрям вектора \mathbf{E} пов'язати з віссю y , то обнулятиметься перша система рівнянь з (3.23), і ми отримаємо аналогічні (3.23) вирішення другої системи, але вектор електричного поля буде розташований у площині yOz . Це відповідає *горизонтальній* поляризації (рис. 3.8, *b*).

Проте такий вибір можливий тільки при збереженні просторової орієнтації векторів поля, що спостерігається далеко не завжди. Системи рівнянь є незалежними і спільне рішення для необмеженого непоглинаючого середовища повинне мати вид суми хвиль, що біжать:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_{0x}) + \mathbf{e}_y E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_{0y}). \quad (3.30)$$

Природно, що параметри хвилі ω і k мають бути однаковими для обох проєкцій, а амплітуди і початкові фази можуть розрізнятися. Якщо, наприклад, фази однакові, то орієнтація вектора \mathbf{E} у просторі зберігатиметься при поширенні і хвиля буде також лінійно поляризованою, але під деяким кутом до осей x і y (рис. 3.8, *в*). Величина цього кута залежить від співвідношення між амплітудами проєкцій вектора електричного поля. При різних початкових фазах орієнтація вектора електричного поля не зберігається.

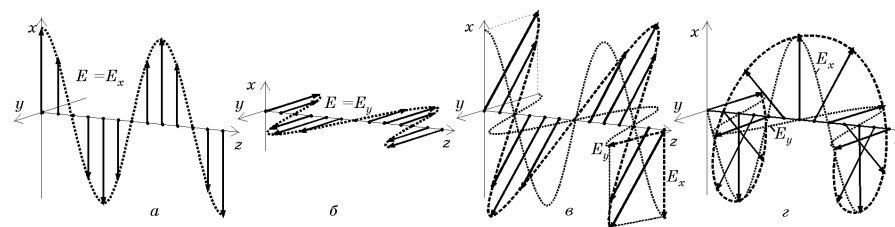


Рис. 3.8. Орієнтація векторів електричного поля для вертикальної (*a*), горизонтальної (*b*), похилої (*в*) та кругової (*г*) поляризацій. Значення напруженості поля пропорційні довжині векторів

Наприклад, при фазовому зсуві між амплітудами на $\pm\pi/2$ і рівних амплітуд (рис. 3.8, *г*) довжина вектора \mathbf{E} залишається незмінною, а його кінець у просторі описуватиме спіраль постійного радіуса, а у фіксованій точці простору – коло. Це відповідає *круговій* поляризації, яка залежно від знаку фазового зсуву і відповідно від напрямку обертання може бути *правою круговою* або *лівою круговою* поляризацією. При інших фазових зсувах і різних амплітуд E_{mx} і E_{my} можна отримати *еліптично поляризовану* хвилю.

3.3.3. Параметри хвилі у різних середовищах.

Розглянемо детально, як змінюються основні параметри хвилі, збудженої на якійсь частоті ω , в залежності від властивостей середовища. Спочатку зробимо деякі підготовчі перетворення. Відповідно до (3.22) і (3.2)

$$\gamma = k - i\alpha = \omega \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = (\omega / c) \sqrt{\epsilon \mu (1 - i \text{tg} \delta)}.$$

Для зручності розділення γ на дійсну й уявну частини прийемо до уваги, що

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}|^2 &= k^2 + \alpha^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon \mu \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}, \\ \operatorname{Re}(\dot{\gamma}^2) &= k^2 - \alpha^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon \mu. \end{aligned}$$

Звідси, додаючи ці вирази, а потім їх віднімаючи, легко одержати

$$\begin{aligned} k &= (\omega/c) \sqrt{\varepsilon \mu (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)} / 2, \\ \alpha &= (\omega/c) \sqrt{\varepsilon \mu (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1)} / 2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Вираз для комплексного хвильового опору для загального випадку можна записати у формі

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}}} e^{i\delta/2}. \quad (3.32)$$

Проаналізуємо параметри хвилі для чотирьох найпростіших, але досить характерних в інженерній практиці випадків.

1. *Вакуум* ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\operatorname{tg} \delta = 0$). Безпосередньо з (3.31) одержуємо, що в вакуумі згасання електромагнітної хвилі відсутнє ($\alpha = 0$), хвиля розповсюджується із швидкістю $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ і має довжину хвилі $\lambda_0 = 2\pi/k = 2\pi c/\omega = c/f$. Крім того, хвильовий опір вакууму $Z_{c0} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ Ом – величина дійсна, і вектори електричного й магнітного полів змінюються синфазно.

3. *Ідеальний діелектрик* ($\varepsilon > 1$, $\mu = 1$, $\operatorname{tg} \delta = 0$). Відміни від попереднього випадку полягають в тому, що тут швидкість розповсюдження, довжина хвилі і хвильовий опір зменшуються в $\sqrt{\varepsilon}$ раз:

$$c_\varepsilon = c/\sqrt{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon}, Z_{c\varepsilon} = Z_{c0}/\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.33)$$

3. *Діелектрик з малими втратами* ($\varepsilon > 1$, $\mu = 1$, $\operatorname{tg} \delta \ll 1$). Нехтуючи у виразі (3.31) для k величиною $\operatorname{tg}^2 \delta$, одержуємо, що швидкість і довжина хвилі залишаються такими ж, як і в ідеальному діелектрику. Таке наближення не можна зробити у

виразі для α . Скористаємось наближеною формулою $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \approx 1 + \operatorname{tg}^2 \delta / 2$ і одержимо

$$\alpha \approx \omega \operatorname{tg} \delta / 2c_\varepsilon = \pi \operatorname{tg} \delta / \lambda_\varepsilon = \sigma Z_{c\varepsilon} / 2, \quad (3.34)$$

тобто коефіцієнт згасання прямо пропорційний питомій електричній провідності середовища.

При проходженні відстані l амплітуда хвилі зменшується в $e^{\alpha l}$ разів, а її енергія в $\beta = e^{2\alpha l}$. Звичайно згасання виражають у децибелах, які визначаються таким чином:

$$\beta \text{ (дБ)} = 10 \lg \beta = 10 \lg (e^{2\alpha l}) \approx 8,686 \alpha l. \quad (3.35)$$

З виразу (3.32) для малих втрат можна вважати, що $|\dot{Z}_{c\varepsilon}| = Z_{c\varepsilon} = Z_{c0}/\sqrt{\varepsilon}$, а $\varphi_z = \delta/2$, тобто зміни магнітного поля запізнюються по фазі на $\delta/2$ відносно змін електричного.

4. *Провідне середовище*, в якому струми провідності переважають над струмами зміщення ($\operatorname{tg} \delta \gg 1$). У цьому випадку, як витікає з (3.31), при $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ можна знехтувати різницею між фазовою сталою і сталою згасання:

$$k \approx \alpha \approx (\omega/c) \sqrt{\varepsilon \mu \operatorname{tg} \delta} / 2 = \sqrt{\omega \mu \mu_0 \sigma} / 2. \quad (3.36)$$

Хвильовий опір такого середовища є комплексною величиною, а тому що при $\operatorname{tg} \delta \gg 1$, $\delta \approx \pi/2$, $\exp(i\delta/2) \approx (1+i)/\sqrt{2}$, то з (3.35)

$$\dot{Z}_c = (1+i) \sqrt{\omega \mu \mu_0} / 2\sigma. \quad (3.37)$$

Одержані результати дозволяють зробити ряд практично важливих висновків.

По-перше, з рівності $k \approx \alpha$ випливає, що поглинання хвилі відбувається на відстанях порядку довжини хвилі. Більш точно глибину поглинання прийнято оцінювати величиною

$$\Delta = 1/\alpha = \sqrt{2/\omega \mu \mu_0 \sigma} = 1/\sigma \operatorname{Re}(\dot{Z}_c). \quad (3.38)$$

В дійсності на відстані Δ відбувається послаблення амплітуди в $e \approx 2,71$ рази. Вважають, що практично поглинання хвилі відбувається на відстанях (3...5) Δ . При цьому зміна фази хвилі складає (3...5) рад.

Цей же результат означає, що електромагнітне поле біля поверхні провідника проникає в нього на величину порядку Δ . Відповідно і струми провідності протікають лише в приповерхневому шарі. Вказане явище називається *поверхневим ефектом* (*скін-ефектом*). Товщина поверхневого шару зменшується із зростанням частоти, тому цей ефект помітний перш за все на високих частотах, наприклад, для міді Δ (мкм) $\approx 66/\sqrt{f(\text{МГц})}$ і на частоті 1000 МГц $\Delta \approx 2$ мкм. Для ідеального провідника $\sigma \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0$ і електромагнітне поле усередині нього відсутнє.

Другий важливий висновок випливає з (3.37). При розповсюдженні хвилі в провіднику зміни магнітного поля відстають по фазі від змін електричного поля. В ідеальному провіднику $\Delta\varphi \rightarrow \pi/4$, а хвильовий опір $Z_c \rightarrow 0$.

Третій важливий висновок полягає в тому, що присутність втрат у середовищі приводить до залежності фазової швидкості хвилі від частоти:

$$v_\phi = \omega/k \sim \sqrt{\omega}.$$

Це явище називається *дисперсією*, а функція $v_\phi(\omega)$ – *законом дисперсії*. Часто в теорії хвильових процесів закон дисперсії подають як залежність $k(\omega)$, причому відсутність дисперсії відповідає лінійній залежності, а характер дисперсії визначається відхиленням $k(\omega)$ від прямої. Причиною дисперсії можуть бути не тільки втрати в середовищі розповсюдження, а й конфігурація ліній передачі електромагнітних хвиль.

3.4. ХВИЛІ У ДОВГИХ ЛІНІЯХ

На низьких частотах немає особливих проблем об'єднання електронних компонентів в кола за допомогою звичайних провідників. Однак на високих частотах, коли *довжина провідників стає сумірною з довжиною хвилі сигналу*, через скінченність часу розповсюдження електромагнітного збудження потенціал в різних точках вздовж провідника буде різним. За цих умов стають невірними закони Ома й Кірхгофа, на яких заснована теорія кіл, і точний аналіз процесів тут можливий тільки на основі теорії поля. Однак, доцільним може бути хвильовий підхід, в основі якого лежить теорія розповсюдження *хвиль струму й напруги* вздовж лінії передачі.

3.4.1. Телеграфні рівняння

В однорідній двопровідній лінії (рис. 3.8), де спостерігається суттєве запізнення поширення сигналу, струм і напруга є функціями координат і часу, тому

$$dV(x,t) = (\partial V/\partial x)dx + (\partial V/\partial t)dt,$$

$$di(x,t) = (\partial i/\partial x)dx + (\partial i/\partial t)dt.$$

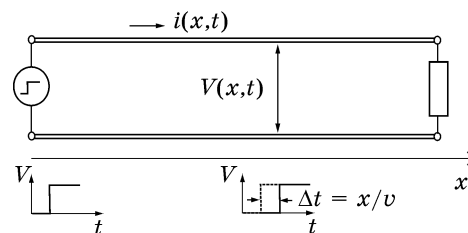
Для аналізу процесів, що виникають при передачі сигналу вздовж лінії через його запізнення, необхідно знати швидкість його поширення, яка визначається параметрами лінії. Провідники ліній мають скінченний опір, який треба враховувати, особливо при великій довжині. При протіканні струму навколо проводів утворюється магнітне поле, величина якого визначається їх індуктивністю.

Неідеальність ізоляції породжує струми витоку між проводами, які залежать від провідності діелектрика. Нарешті, змінне електричне поле між проводами викликає протікання струму зміщення, що моделюється

Рис. 3.8. Скінченна швидкість поширення викликає запізнення сигналу, через що струм і напруга стають функціями координат.

емністю між проводами. Ці параметри рівномірно (для однорідних ліній) розподілені вздовж всієї довжини проводів, тому пристрої, що включають відрізки довгих ліній, є *колами з розподіленими параметрами*. Для ліній передачі зручно задавати четвірку так званих *погонних* (в розрахунку на одиницю довжини) параметрів: погонний опір r_0 [Ом/м], погонна індуктивність L_0 [Гн/м], погонна провідність g_0 [См/м] та погонна ємність C_0 [Ф/м]. За допомогою цих параметрів моделюють омичний опір та індуктивні властивості провідників, а також струми витоку і струми зміщення в діелектричному середовищі між провідниками лінії.

Для складання основних рівнянь, що описують динаміку зміни струму й напруги вздовж лінії, розглянемо диференційний відрізок лінії довжиною dx з відомими погонними параметрами. Для цього відрізка лінії цілком придатна схемна модель із зосередженими параметрами (рис. 3.9, а).



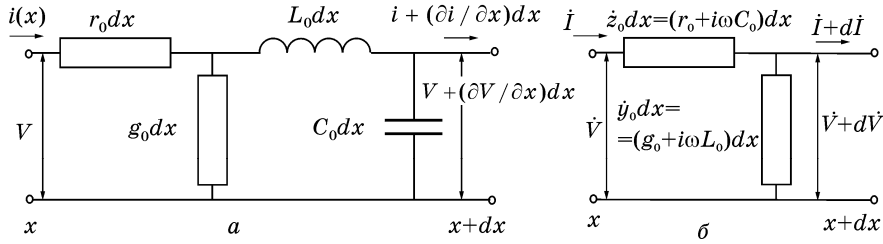


Рис. 3.9. Схемна модель диференціальної ділянки довгої лінії може бути представлена через зосереджені параметри у дійсній (а) та комплексній формі (б).

Природньо, що зміна напруги $(\partial V / \partial x) dx$ між провідниками в даний момент часу визначається падінням напруги на омичному $(i r_0 dx)$ та індуктивному $(L_0 (\partial i / \partial t) dx)$ опорах провідників. Аналогічно, зміна струму в проводі $(\partial i / \partial x) dx$ на ділянці dx відбувається за рахунок струму витоку $V g_0 dx$ та струму зміщення $C_0 (\partial V / \partial t) dx$. Звідси, при скороченні на dx всіх доданків, одержимо

$$\begin{aligned} \partial V / \partial x &= -r_0 i - L_0 (\partial i / \partial t); \\ \partial i / \partial x &= -g_0 V - C_0 (\partial V / \partial t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Одержані диференціальні рівняння в частинних похідних називають *телеграфними*, тому що за їх допомогою був проведений аналіз розповсюдження телеграфних сигналів на великі відстані.

Надалі обмежимося розглядом тільки гармонічних процесів $\dot{V}(x)e^{i\omega t}$ та $\dot{I}(x)e^{i\omega t}$. У цьому випадку модель елементарної ділянки може бути зображена рис. 3.9, б, де $z_0 = r_0 + i\omega L_0$ та $y_0 = g_0 + i\omega C_0$, а телеграфні рівняння при застосуванні методу комплексних амплітуд перетворюються до вигляду:

$$\begin{cases} d\dot{V} / dx = -z_0 \dot{I}, \\ d\dot{I} / dx = -y_0 \dot{V}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Розділити цю систему на незалежні рівняння можна повторним диференціюванням і перехресною підстановкою перших похідних з (3.40):

$$d^2 \dot{V} / dx^2 = \gamma^2 \dot{V}; \quad d^2 \dot{I} / dx^2 = \gamma^2 \dot{I}. \quad (3.41)$$

Тут введено позначення

$$\sqrt{z_0 y_0} = \sqrt{(r_0 + i\omega L_0)(g_0 + i\omega C_0)} \equiv \dot{\gamma} = \alpha + ik, \quad (3.42)$$

де комплексна величина $\dot{\gamma}$ називається *сталю розповсюдження*, а розв'язок (3.41) постає у вигляді прямих (падаючих) та зворотних (відбитих) хвиль струму і напруги:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}^+ e^{-\dot{\gamma}x} + \dot{V}^- e^{\dot{\gamma}x}; \\ \dot{I} &= \dot{I}^+ e^{-\dot{\gamma}x} - \dot{I}^- e^{\dot{\gamma}x}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Тут \dot{V}^+ , \dot{V}^- , \dot{I}^+ і \dot{I}^- – сталі інтегрування, що мають смисл комплексних амплітуд відповідних хвиль. Зменшити їх кількість можна, якщо підставити розв'язок (3.43) у вихідні рівняння (3.40) й прирівняти коефіцієнти при однакових функціях. В результаті одержимо зв'язок між амплітудами струму й напруги для хвиль однакового напрямку:

$$\frac{\dot{V}^+}{\dot{I}^+} = \frac{\dot{V}^-}{\dot{I}^-} = \sqrt{\frac{r_0 + i\omega L_0}{g_0 + i\omega C_0}} \equiv Z_0, \quad (3.44)$$

де Z_0 називають *хвильовим опором лінії*.

Привертає увагу, що це відношення однакоове для хвиль, що падають, і відбитих і визначається погонними параметрами лінії. Використовуючи зв'язок та позначення (3.44), запишемо:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}^+ e^{-\dot{\gamma}x} + \dot{V}^- e^{\dot{\gamma}x}; \\ \dot{I} &= (\dot{V}^+ e^{-\dot{\gamma}x} - \dot{V}^- e^{\dot{\gamma}x}) / Z_0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Відновити з (3.45) миттєві значення дійсних функцій можна за правилом $V(x,t) = \text{Re}[\dot{V}(x)e^{i\omega t}]$. Враховуючи комплексний характер сталої розповсюдження, одержимо для напруги

$$V(x,t) = V_m^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - kx + \varphi^+) + V_m^- e^{\alpha x} \cos(\omega t + kx + \varphi^-). \quad (3.46)$$

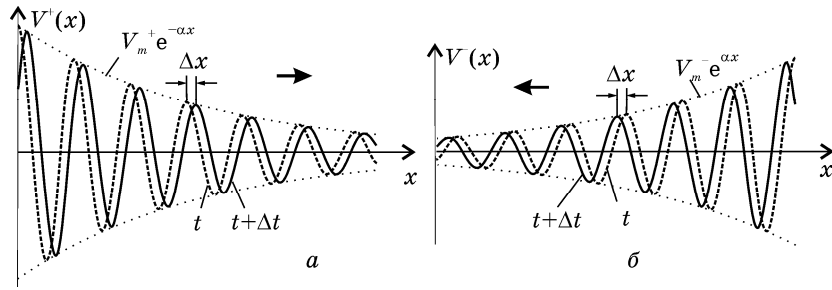


Рис. 3.10. Миттєві «фотографії» падаючої (а) та відбитої (б) хвилі напруги. Як падаюча, так і відбита хвилі згасають у напрямку свого поширення.

Підсумок розв'язання телеграфного рівняння полягає в тому, що в довгій лінії поширення збудження відбувається у вигляді хвильових процесів, причому величина характеризує згасання хвиль, а k – хвильове число. Треба також пам'ятати, що фазова швидкість розповсюдження хвиль $v_\phi = \omega/k$ у загальному випадку залежить від частоти збудження, а це свідчить про наявність дисперсії.

У ряді випадків, особливо на високих частотах, можна знехтувати згасанням в лінії. Це можливо, якщо $r_0 \ll \omega L_0$ та $g_0 \ll \omega C_0$, тобто активний опір провідників багато менший за індуктивний, а струми витоку між проводами менші за струми зміщення. При цьому стала розповсюдження $\gamma = i\omega\sqrt{L_0 C_0} = ik$ (тобто $\alpha = 0$), фазова швидкість $v_\phi = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ (тобто дисперсія відсутня), а хвильовий опір $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$ є дійсною величиною. Розв'язки (3.45) для лінії без втрат приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}^+ e^{-ikx} + \dot{V}^- e^{ikx}; \\ \dot{I} &= (\dot{V}^+ e^{-ikx} - \dot{V}^- e^{ikx}) / Z_0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Подальше визначення сталих інтегрування \dot{V}^\pm можливе, якщо відома потужність джерела, що задає амплітуду падаючої хвилі, та умови на навантажувальному кінці лінії, які визначають ступінь відбивання.

3.4.2. Стоячі хвилі в лінії

Для подальшого аналізу зручно поміняти початок і напрямок відліку, як це вказано на рис. 3.11. Поки не визначені

сталі інтегрування, це можна зробити простою заміною знаку в фазових множниках (3.47):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{V}^+ e^{ikx} + \dot{V}^- e^{-ikx}; \\ \dot{I}(x) &= (\dot{V}^+ e^{ikx} - \dot{V}^- e^{-ikx}) / Z_0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

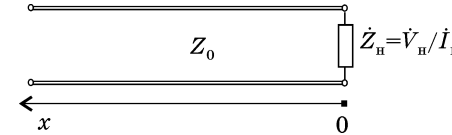


Рис. 3.11. Початок відліку зручно обрати у місці підключення навантаження.

Ступінь відбивання зручно характеризувати з допомогою комплексного коефіцієнта відбивання

$$\rho = \dot{V}^- / \dot{V}^+ = |\rho| e^{i\phi_0}, \quad (3.49)$$

що включає модуль $|\rho| = \dot{V}_m^- / \dot{V}_m^+$, який дорівнює відношенню амплітуд відбитої та падаючої хвиль, і фазу відбивання $\phi_0 = \phi_0^- - \phi_0^+$, яка показує зсув фази хвилі у місці відбивання.

Щоб зрозуміти, від чого і як залежить ступінь відбивання, розділимо перший вираз з (3.48) на другий для точки підмикання навантаження ($x = 0$). Враховуючи, що $\dot{V}(0) = \dot{V}_n$, $\dot{I}(0) = \dot{I}_n$, а їх відношення $\dot{V}_n / \dot{I}_n = \dot{Z}_n$, одержимо

$$\dot{Z}_n = Z_0 \frac{\dot{V}^+ + \dot{V}^-}{\dot{V}^+ - \dot{V}^-} = Z_0 \frac{1 + \dot{\rho}}{1 - \dot{\rho}}. \quad (3.50)$$

Звідси видно, що коефіцієнт відбивання повністю визначається опором навантаження, точніше, його співвідношенням з хвильовим опором лінії передачі

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{Z}_n - Z_0}{\dot{Z}_n + Z_0}. \quad (3.51)$$

Отже, при заданих опорах \dot{Z}_n і Z_0 може бути знайдений коефіцієнт відбивання (його модуль і фаза), а значить відомими стають функції розподілу струму й напруги вздовж лінії передачі з точністю до постійного співмножника (комплексної амплітуди падаючої хвилі):

$$\begin{aligned} V(x) &= V^+(e^{ikx} + \rho e^{-ikx}); \\ I(x) &= V^+(e^{ikx} - \rho e^{-ikx}) / Z_0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ці вирази, записані у вигляді суми падаючих і відбитих хвиль, також можна представити в іншому еквівалентному вигляді, виносячи за дужки експоненту з просторовим набігом фази і відновивши для наочності часовий множник

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &= \dot{V}^+(1 + \rho e^{-i2kx}) e^{i(\omega t + kx)}; \\ \dot{I}(x, t) &= \dot{I}^+(1 - \rho e^{-i2kx}) e^{i(\omega t + kx)}. \end{aligned} \quad (3.52a)$$

Такий запис є напругою і струмом в кожній точці довгої лінії у вигляді тільки падаючої хвилі, але з амплітудами, залежними від координати. При розробці пристроїв, що використовують відрізки ліній передачі, часто треба знати розподіл амплітуди напруги і (або) струму вздовж лінії. Для дійсних амплітуд

$$\begin{aligned} V_m(x) &= |V(x)| = |V^+| |e^{ikx} + \rho e^{-ikx}| = V_m^+ |1 + \rho e^{-i2kx}|; \\ I_m(x) &= |I(x)| = |I^+| |e^{ikx} - \rho e^{-ikx}| = I_m^+ |1 - \rho e^{-i2kx}|; \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ці функції є періодичними з просторовим періодом $\Delta x = \lambda/2$, на якому аргумент експоненти $2k\Delta x$ змінюється на 2π . Характерними для них є точки з максимальною амплітудою, так звані пучності, і точки з мінімальною амплітудою – вузли. Така ситуація виникає за рахунок суперпозиції коливань, викликаних падаючою і відбитою хвилями. Результат накладення залежить від різниці фаз, з якими зустрічаються хвилі в даній точці. Віднімаючи аргументи при косинусах у (3.46), отримаємо

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx + \varphi_0^-) - (\omega t + kx + \varphi_0^+) = -2kx + \varphi_0. \quad (3.54)$$

Пучності утворюються в тих точках, де ця різниця кратна 2π . Такі коливання будуть синфазними і їх результуюча амплітуда дорівнюватиме сумі $V_m^+ + V_m^- = V_{m \max}$. Вузли відповідають тим точкам, де падаюча і відбита хвилі зустрічаються з фазовим зсувом кратним непарному числу π . За рахунок протифазності таких коливань амплітуда у вузлах дорівнюватиме різниці $V_m^+ - V_m^- = V_{m \min}$. Відбита хвиля струму має додатковий зсув по фазі на π у порівнянні з відбитою хвилею напруги, про що свідчить знак «-» перед другим доданком для струму в (3.52) і (3.53). Це

приводить до того, що вузлам струму відповідають пучності напруги і навпаки.

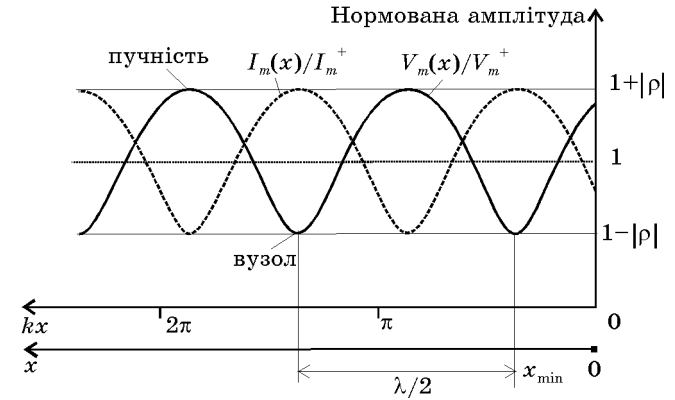


Рис. 3.12. Суперпозиція падаючої і відбитої хвиль приводить до періодичної зміни амплітуди з просторовим періодом у половину довжини хвилі. Розподіли амплітуд хвиль напруги (суцільна лінія) і струму (штрихова) уздовж лінії зсувнуті щодо один одного на чверть довжини хвилі.

Примітно, що різниця фаз $\Delta\varphi$ у (3.54) не залежить від часу: у кожній точці вона визначається лише зсувом фази при відбиванні φ_0 і подвоєним («туди і назад») просторовим набігом фази $2kx$ між точкою x і точкою підключення навантаження. Тому крива розподілу амплітуд, а значить і положення вузлів і пучностей, не залежить від часу. З цим і пов'язана назва – «стояча хвиля».

Для більш детального аналізу функцій розподілу амплітуд розглянемо графічний спосіб їх визначення. В кожній точці напруга знаходиться як сума двох доданків: падаючої хвилі $V^+ = \text{Re}[V^+ e^{i(\omega t + kx)}]$ (початкова фаза φ^+ звичайно може бути прийнята рівною 0) і відбитої хвилі $V^- = \text{Re}[V^- e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}]$. Результуюча напруга – $V(x, t) = \text{Re}[V(x) e^{i\omega t}]$, де комплексну амплітуду зручно знайти на комплексній площині (рис. 3.13,а) як суму вектора з довжиною $|V^+|$ та просторовою частиною фази kx і вектора з довжиною $|V^-| = |\rho| |V^+|$ та фазою $(\varphi_0 - kx)$, що складається із зсуву при відбиванні $\varphi_0 = \varphi_0^- - \varphi_0^+$ та просторового набігу $-kx$. Дійсна амплітуда напруги дорівнює довжині сумарного вектора. При переміщенні від навантаження фаза kx збільшується, і вектор падаючої хвилі обертається проти годинникової стрілки, а вектор відбитої у зворотному напрямі. У точках, де ці вектори збігаються

за напрямом, утворюється пучність, а там, де вони протилежні – вузол.

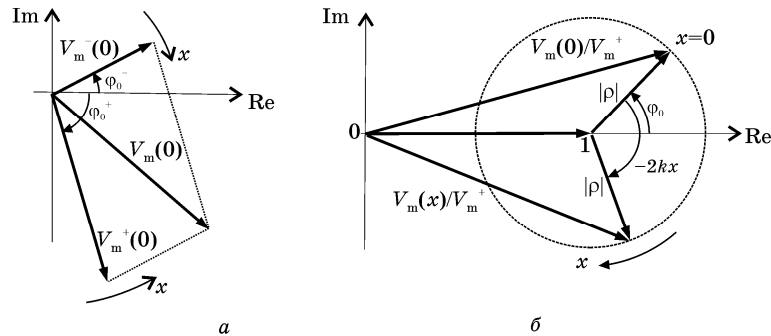


Рис. 3.13. Графічний спосіб визначення результуючої амплітуди на комплексній площині (а). Те саме для векторів, нормованих на амплітуду падаючої хвилі (б)

Таку побудову зручніше робити, пронормувавши всі доданки на комплексну напругу падаючої хвилі. При цьому комплексна амплітуда падаючої хвилі зображується одиничним вектором, а відбитої — вектором ρe^{-i2kx} (рис. 3.13,б). У точці приєднання навантаження ($x = 0$) амплітуда нормованої напруги дорівнює. У довільній точці x' фаза падаючої хвилі збільшиться, а фаза відбитої – зменшиться на kx' . В результаті додатковий зсув між ними складатиме $2kx'$ і нормована амплітуда знаходиться як довжина вектора $1 + \rho e^{-i2kx'}$. При переміщенні від навантаження до джерела кінець результуючого вектора напруги описує коло $|\rho| = \text{const}$ (із центром в точці 1), періодично проходячи через точки максимуму $|V/V^+|_{\text{max}} = 1 + |\rho|$, де падаюча і відбита хвилі синфазні, і мінімуму $|V/V^+|_{\text{min}} = 1 - |\rho|$, де вони протифазні. Оскільки нормований вектор відбитої хвилі обертається за годинниковою стрілкою з “подвоєною частотою” за рахунок зустрічного набігу фази (kx – для падаючої і $-kx$ – для відбитої), то період функції розподілу амплітуди напруги дорівнює π вздовж фазової осі kx і $\lambda/2$ – по осі відстаней x . Цей факт широко використовується для вимірювання довжини хвилі в лінії. Практично важливо також те, що крива $V_m(x)$ більш гостра в околі мінімуму.

Перший від навантаження вузол x_{min} розташований в тому місці, де фазовий зсув $\Delta\varphi(x_{\text{min}}) = \pi$. Звідси витікає, що відповідно до (3.54) його розташування однозначно пов'язане з фазою коефіцієнта відбивання: $\varphi_0 = \pi + 2kx_{\text{min}} = \pi(1 + 4x_{\text{min}}/\lambda)$. Цей факт використовується для знаходження фази коефіцієнта відбивання по вимірюваному положенню вузла стоячої хвилі.

Розподіл амплітуди струму вздовж лінії повторює розподіл напруги, але максимуми струму співпадають з мінімумами напруги і навпаки. Це відбувається через те, що умови відбивання для хвиль струму й напруги різні. При відбиванні від навантаження хвиля струму має додатковий зсув фази на 180° (знак “-” перед другим доданком у виразі (3.53) для струму).

Отже, в результаті накладення двох зустрічних хвиль виходить, що в різних точках лінії передачі напруга $V(x, t) = V_m(x)\cos(\omega t + \varphi_v(x))$ і струм $i(x, t) = I_m(x)\cos(\omega t + \varphi_i(x))$ мають різні значення амплітуди і фази. Розподіл амплітуд не залежить від часу, тому така суперпозиція називається стоячою хвилею. Заведено криву розподілу амплітуди кількісно характеризувати коефіцієнтом стоячої хвилі (КСХ), що дорівнює відношенню максимальної й мінімальної амплітуд

$$\text{КСХ} = \frac{|V|_{\text{max}}}{|V|_{\text{min}}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (3.55)$$

й однозначно пов'язаний з модулем коефіцієнту відбивання. Діапазон можливих значень КСХ лежить у границях від 1 до ∞ (рис. 3.14).

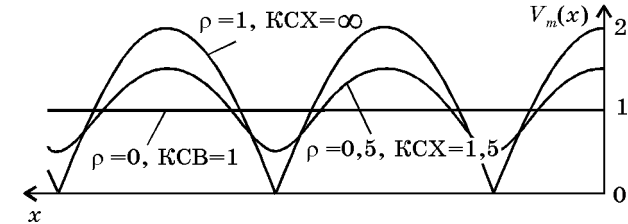


Рис. 3.14. Форма просторового розподілу амплітуди напруги характеризується коефіцієнтом стоячої хвилі.

Ступінь відбивання визначає і величину потужності, яка поступає з лінії у навантаження. Миттєва потужність визначається добутком струму $i(x, t)$ і напруги $V(x, t)$. Вона є досить складною функцією координати і часу і містить деяку постійну складову і змінну, що змінюється з часом з частотою 2ω . Якщо обмежитися тільки середньою за часовий період потужністю, яка і визначає активну потужність, що передається з лінії у навантаження, то її легко визначити як дійсну частину комплексної потужності. Комплексна потужність, що передається по лінії передачі, може бути знайдена через комплексні амплітуди напруги і струму (3.48): Підстановка значень з (3.52) дає

$$P_n = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{V}^+ \dot{I}^{+*} (1 + \rho e^{-i2kx})(1 - \rho^* e^{i2kx})] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{V}^+ \dot{I}^{+*} (1 - |\rho|^2)] = P^+ (1 - |\rho|^2), \quad (3.56)$$

де P^+ – потужність падаючої хвилі. Даний результат показує, що потужність, що віддається у навантаження, визначається квадратом модуля коефіцієнта відбивання ρ . Інколи використовують коефіцієнт відбивання потужності $R = P^-/P^+$, який пов'язаний з амплітудним коефіцієнтом відбивання співвідношенням $R = 1 - |\rho|^2$.

3.4.3. Трансформація опору в лініях

Кількісні розрахунки для пристроїв, які включають відрізки ліній передачі, часто проводять в термінах опорів. Введемо поняття комплексного опору в даній точці, як відношення комплексних амплітуд струму й напруги. Оскільки напруга й струм різні в різних точках лінії, то в загальному випадку й опір залежить від координати

$$\dot{Z}(x) = \dot{V}(x) / \dot{I}(x). \quad (3.57)$$

Встановити цей закон змінення можна, розділивши вирази для напруги й струму з (3.52). Підставляючи замість ρ його зв'язок (3.51) з опором навантаження, після тотожних перетворень одержимо

$$\dot{Z}(x) = Z_0 \frac{\dot{Z}_n + iZ_0 \operatorname{tg} kx}{Z_0 + i\dot{Z}_n \operatorname{tg} kx}. \quad (3.58)$$

Цей вираз показує, як опір навантаження \dot{Z}_n трансформується в опір $\dot{Z}(x)$ у даній точці лінії. Аналогічний вираз

$$\dot{Z}_2 = Z_0 \frac{\dot{Z}_1 + iZ_0 \operatorname{tg} k(x_2 - x_1)}{Z_0 + i\dot{Z}_1 \operatorname{tg} k(x_2 - x_1)} \quad (3.59)$$

показує закон трансформації опору з точки x_1 в точку x_2 .

На завершення розглянемо два окремих, але характерних приклади.

1. *Режим узгодження* (біжучої хвилі). З виразу (3.51) виходить, що відбивання відсутнє, якщо лінія навантажена на опір, який дорівнює хвильовому $\dot{Z}_n = Z_0$. В цьому випадку в лінії буде існувати тільки біжуча хвиля, амплітуда її у всіх точках буде однаковою (рис. 3.15) і КСХ = 1. Однаковим і рівним хвильовому буде також опір у будь-якій точці вздовж лінії (3.58). Потужність, що передається у

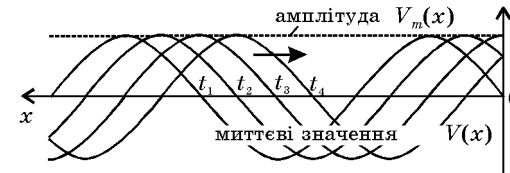


Рис. 3.15. Миттєві «фотографії» хвильового процесу для режиму біжучої хвилі. Амплітуда хвилі у всіх точках однакова.

навантаження, буде максимальною і дорівнюватиме потужності падаючої хвилі (3.56). Звичайно на практиці режиму узгодження з цілого ряду причин віддається найбільша перевага.

2. *Режим повного відбивання*. Якщо у виразі (3.51) замість \dot{Z}_n підставити будь-яку уявну величину, то чисельник і знаменник будуть комплексно спряженими, а їх модулі однаковими. Тому повне відбивання ($|\rho| = 1$) буде в лінії, навантаженій на чисто реактивне навантаження $\dot{Z}'_n = 0 + iX'_n$. Фізично це означає, що таке навантаження не поглинає енергію і хвиля повністю відбивається. В цьому випадку утворюється чисто стояча хвиля з нульовою амплітудою в вузлах і подвоєною в пучностях, що відповідає КСХ = ∞ . Подібна ситуація має місце також і у режимі короткого замикання ($\dot{Z}_n = 0$, $\rho = -1$), або холостого ходу ($\dot{Z}_n = \infty$, $\rho = 1$).

На практиці режим повного відбивання найчастіше реалізують за допомогою короткого замикання лінії. В цьому випадку $\rho = -1$ і в лінії утворюються *чисто стоячі хвилі* напруги й струму з розподілом амплітуд, вказаних на рис. 3.16,б. Розподіли для миттєвих значень легко відновити з (3.48) для комплексних амплітуд за умови $\dot{V}^- = -\dot{V}^+$:

$$\begin{aligned} V(x, t) &= -2V_m^+ \sin kx \sin \omega t, \\ i(x, t) &= 2V_m^+ \cos kx \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Строго кажучи, ці вирази, отримані як сума двох зустрічних хвиль з рівними амплітудами, описують не хвильовий процес, а коливання (рис. 3.16,а) з подвоєною амплітудою у вузлах і нульовою у пучностях. Формальною ознакою цього є відсутність аргументу, куди координата і час входять як лінійна комбінація.

Опір короткого замикання $Z_n = 0$ трансформується у чисто реактивний опір, що змінюється вздовж лінії за законом (рис. 3.16,в)

$$Z(x) = iZ_0 \operatorname{tg} kx. \quad (3.61)$$

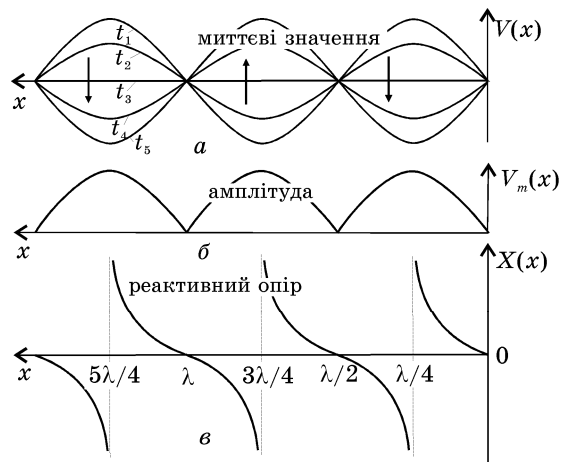


Рис. 3.16. Розподіл миттєвих значень хвилі напруги (а), її амплітуди (б) та реактивного опору (в) вздовж лінії при короткому замиканні.

Ця властивість використовується для створення елементів, вхідний опір яких буде чисто реактивним. У техніці реактивні елементи часто конструюють як відрізки короткозамкнених ліній, їх називають *шлейфами*. Так, вхідний опір для відрізка довжиною, меншою за $\lambda/4$, має індуктивний характер, більшою за $\lambda/4$, але меншою за $\lambda/2$ – емнісний характер. Величина реактивності може бути довільною в залежності від довжини відрізка. Цікаво відзначити, що чвертьхвильові відрізки, довжина яких кратна непарному числу чвертей довжин хвиль, мають нескінченно великий вхідний опір, який відповідає режиму холостого ходу. Це його властивість знаходить широке вживання у техніці елементів лінії передачі. Вхідний опір короткозамкнених напівхвильових відрізків, довжина яких кратна цілому числу половин довжин хвиль, дорівнює нулю. Вони також мають *резонансні властивості*.

Режими, що розглянуто, є «крайніми». У проміжних випадках при нерівності опору навантаження і хвильового опору в лінії встановлюється режим *змішаних хвиль*, який можна розглядати як суперпозицію режимів біжучої і чисто стоячої хвилі. При цьому КСХ буде відмінним від 1, у вузлах амплітуда коливань не буде нульовою, а в пучностях – подвоєною. Опір уздовж лінії змінюватиметься відповідно до (3.58) для даного значення Z_n , а потужність падаючої хвилі повністю не поглинатиметься таким навантаженням (3.56), частка її, рівна $(1 - |\rho|^2)$ відбиватиметься.

У технічних пристроях такий режим має цілу низку недоліків (додаткові втрати в лінії за рахунок коливань реактивної енергії, погіршення частотних характеристик і так далі). Для компенсації цього і отримання режиму хвилі, що біжить, використовують так звані *узгоджуючі пристрої*, які, будучи включеними перед навантаженням, створюють відбиту хвилю, рівну за амплітудою і з протилежною фазою відносно хвилі, відбитої від навантаження. У результаті інтерференції цих хвиль у лінії перед узгоджуючим пристроєм, встановлюється режим біжучої хвилі. Такий пристрій має бути чисто реактивним, щоб не створювати додаткові втрати. Для його розрахунку за допомогою виразу (3.58) знаходять в лінії таку точку x^* , в якій опір має активну складову, рівну хвильовому: $Z(x^*) = Z_0 \pm iX(x^*)$. При включенні в цьому місці узгоджуючого елемента, наприклад, шлейфу з реактивним опором $\mp X(x^*)$, таким саме за величиною, але протилежного знаку, сумарний опір дорівнюватиме хвильовому. У результаті навантаження разом з узгоджуючим елементом можна розглядати як узгоджене, що забезпечує режим біжучої хвилі. При цьому між навантаженням і узгоджуючим елементом буде режим стоячих хвиль. Зазвичай таких точок x^* , що задовольняють умові узгодження, може бути багато, але вибирати треба ту, яка знаходиться як можна ближче до навантаження.