

2. СТАТИЧЕСКИЕ, СТАЦИОНАРНЫЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

В этом разделе рассматриваются поля, для которых можно пренебречь изменением их во времени (статические и стационарные), или эти изменения очень медленные (квазистационарные). Главная особенность таких полей следует из уравнений Максвелла, если в них принять $\partial/\partial t = 0$. В этом случае полная система уравнений разделяется на две отдельные системы

для электрических полей:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \end{aligned}$$

для магнитных полей:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Такое разделение означает, что статические электрические и магнитные поля не зависят друг от друга и их можно рассматривать в отдельности.

2.1 ЭЛЕКТРОСТАТИКА

2.1.1. Основные уравнения электростатики

Электростатика – это раздел теории электромагнитного поля, который изучает электрические поля, образованные неподвижными зарядами. Понятно, что такую ситуацию надо рассматривать лишь как идеализированную, когда отсутствует перенос заряда, то есть токи проводимости, а это, в свою очередь, возможно только для идеальных диэлектрических сред ($\sigma = 0$). В реальных ситуациях статическими считают такие поля, напряженность которых не изменяется существенно на протяжении времени наблюдения, поэтому уравнения электростатики непосредственно следуют из второго и третьего уравнений Максвелла, если в них принять $\partial/\partial t = 0$:

дифференциальная форма

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \end{aligned}$$

интегральная форма

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{r} &= 0 \\ \oint_s \mathbf{D} d\mathbf{S} &= \oint_{V_r} \rho dV_r \end{aligned} \quad (2.2)$$

Первое из этих уравнений означает, что электростатическое поле является "безвихревым", или потенциальным, так как для него, используя тождество $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) \equiv 0$ (см. приложение 1), можно ввести некоторую скалярную функцию $V(\mathbf{r})$, которая называется *электростатическим потенциалом*, и такую, что

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

Для выяснения физического смысла потенциала рассмотрим работу по перемещению заряда q в электростатическом поле между точками 1 и 2:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = q \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{r}.$$

Подынтегральное выражение с учетом (2.3) является полным дифференциалом $-dV$, поскольку

$$\mathbf{E} d\mathbf{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = -dV(x, y, z).$$

Поэтому

$$A = -q \int_1^2 dV = q(V_1 - V_2). \quad (2.4)$$

Отсюда видно, что четко определенный *физический смысл имеет разность потенциалов*, которая равна работе по перемещению единичного положительного заряда ($q = +1$) между точками 1 и 2. Причем *значение потенциала может быть определено с точностью до некоторого постоянного слагаемого*, так как замена V на $V + \text{const}$ ничего не меняет. Если выбрать начало отсчета потенциала, например, в точке 2 ($V_2 = 0$), то понятие потенциала приобретает определенность:

$$V(\mathbf{r}) = -\int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{E} d\mathbf{r}. \quad (2.4a)$$

Потенциал данной точки \mathbf{r} есть работа по перемещению единичного положительного заряда из этой точки в точку, где потенциал равняется нулю. В физике обычно нулевым принимают потенциал бесконечно удаленной точки. В технике таким считают или потенциал земной поверхности, или потенциал корпуса прибора, или потенциал общей точки разных источников питания в электронных цепях.

Надо отметить, что результат интегрирования в (2.4) не зависит от траектории перемещения заряда между точками 1 и 2, а только от значений потенциалов в них. Отсюда следует, что *работа внешних сил по перемещению заряда по замкнутой траектории равна 0*.

Важным свойством электростатического поля является то, что при свободном движении заряженной частицы ее *полная энергия остается неизменной*. Чтобы это доказать, умножим скалярно обе части уравнения движения частицы $d(m\mathbf{v})/dt = q\mathbf{E}$ на вектор скорости \mathbf{v} и учтем, что $\mathbf{v}d(m\mathbf{v}) = d(mv^2/2) = dE_k$, а $q\mathbf{E}\mathbf{v} = q\mathbf{E}d\mathbf{r}/dt = -qdV/dt = -dU/dt$, где E_k – кинетическая, а $U = qV$ – потенциальная энергия заряда q . Следовательно,

$$d(E_k + U)/dt = 0, \quad (2.5)$$

и изменение кинетической энергии возможно только за счет соответствующего изменения потенциальной.

Потенциал – скалярная функция координат, и его нахождение является более легкой задачей, чем нахождение напряженности поля, которая, будучи векторной величиной, требует знания трех скалярных (ее проекций) функций. Поэтому для расчета электростатического потенциала используют обычно второе уравнение (2.1), которое с учетом (1.1) и (2.3) при использовании символического оператора ∇ (см. приложение 1) принимает вид

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon\epsilon_0. \quad (2.6)$$

Это уравнение называется *уравнением Пуассона*. Оно позволяет найти распределение потенциала в некоторой области пространства, если в ней задано распределение объемной плотности заряда. Если в рассматриваемой пространственной области объемный заряд отсутствует, распределение потенциала подчиняется так называемому *уравнению Лапласа*:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (2.7)$$

Иногда бывает удобно использовать уравнение Пуассона для вектора индукции электрического поля в форме

$$\nabla^2 \mathbf{D} = \text{grad } \rho. \quad (2.8)$$

Это выражение можно получить, если подействовать оператором grad на уравнение (1.2,е), принимая во внимание тождество $\text{grad } \text{div } \mathbf{D} \equiv \nabla^2 \mathbf{D}$ (см. приложение 1), справедливое для электростатических полей, когда $\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

2.1.2. Типы задач электростатики

Непосредственный расчет пространственного распределения напряженности электрического поля можно проводить при помощи третьего уравнения Максвелла либо в интегральной форме (теорема Гаусса), либо в дифференциальной по (1.2) или по (2.8). Теореме Гаусса удобно использовать лишь при некоторых относительно простых распределениях поля, обладающих той или иной симметрией (примеры 1.3, 2.1).

Существенно упрощает расчет поля использование понятия потенциала, так как нахождение пространственного распределения векторной функции $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ сводится к нахождению только одной скалярной функции $V(\mathbf{r})$ и затем при необходимости к определению ее градиента в соответствии с (2.3).

Формально можно выделить два типа задач, встречающихся при расчетах электростатических полей. Первый заключается в нахождении такого распределения зарядов в пространстве $\rho(\mathbf{r})$, которое обеспечивает требуемое распределение потенциала $V(\mathbf{r})$. Это можно просто сделать в соответствии с уравнением Пуассона (2.6) повторным дифференцированием функции $V(\mathbf{r})$ по координатам.

Более сложным является второй тип задач, когда по заданному распределению зарядов в пространстве необходимо найти распределение поля. В этом случае результат можно получить интегрированием уравнения Пуассона. В принципе это решение может быть получено в общем виде. Для этого воспользуемся *принципом суперпозиции*, взяв за основу распределение потенциала вокруг точечного заряда в виде $V(\mathbf{r}) = q/4\pi\epsilon\epsilon_0 r$. Если начало координат не совпадает с местом расположения заряда, то $V(\mathbf{r}) = q/4\pi\epsilon\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, где \mathbf{r}_0 – координата места расположения заряда, а \mathbf{r} – текущая координата точки, в которой рассчитывается поле. Очевидно, что при наличии в пространстве большого количества зарядов q_i ($i = 1 \dots N$) потенциал можно найти суммированием

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Отсюда легко перейти к непрерывному распределению заряда $\rho(\mathbf{r})$ в объеме V_r , если заменить q_i на $\rho(\mathbf{r})dV_r$, а суммирование – на интегрирование по координатам расположения зарядов (штрихованные переменные):

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'_r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.9)$$

Данное выражение является решением уравнения Пуассона в общем виде. Однако процедура интегрирования в (2.9) может оказаться сложнее, чем интегрирование уравнения Пуассона. Тем более, что задавать пространственное расположение зарядов бывает очень сложно. Например, в тех случаях, когда поля создаются металлическими электродами с известными потенциалами на них, обычно распределение зарядов по их поверхности неизвестно до расчета поля.

Обычно в практических конструкциях поля создаются как системой электродов, так и зарядами в межэлектродном пространстве. Если собственными полями зарядов можно пренебречь, то расчет сводится к интегрированию уравнения Лапласа с граничными условиями в виде известных потенциалов на электродах (т.н. краевая задача). Для таких задач существует единственная функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа и граничным условиям. Если же между электродами существует пространственный заряд с известным распределением $\rho(\mathbf{r})$, то необходимо решать уравнение Пуассона с заданной правой частью.

Однако для электроники наиболее характерны так называемые *самосогласованные задачи*. Они возникают, когда в межэлектродном пространстве имеются движущиеся заряды (подвижные носители заряда) и их собственные поля соизмеримы с полями, создаваемыми внешними источниками. При этом нельзя заранее знать $\rho(\mathbf{r})$ в уравнении Пуассона, плотность заряда зависит от распределения результирующего поля, которое в свою очередь зависит от пространственного распределения зарядов. В этом случае необходимо *согласованно*, то есть как *систему*, решать уравнение Пуассона и в той или иной форме уравнение движения зарядов, описывающее установившееся распределение заряда. Итогом решения самосогласованных задач являются известные распределения потенциала и плотности заряда в пространстве.

2.1.3. Примеры и методы решения задач электростатики

Математически решения электростатических задач при известных потенциалах на проводниках сводится к нахождению функции, которая удовлетворяет уравнению Пуассона и принимает на границе области заданное значение. Эта задача называется задачей Дирихле.

В большинстве случаев решение электростатических задач встречается значительные трудности, и найти аналитическое решение уравнений Пуассона или Лапласа удается лишь в

отдельных случаях при сравнительно простых геометрических конфигурациях проводников. Не существует единого метода решения электростатических задач, и для разных типов применяются различные приемы.

Рассмотрим несколько примеров решения уравнений электростатики. Детальное решение этих задач приведено не только для ознакомления с простейшими моделями распределения полей, к которым сводится много реальных ситуаций, а и с целью ознакомления с *основными этапами расчета* электростатических полей:

- выбором физической модели, которая включает допустимую идеализацию конфигурации электродов и удобное расположение соответствующей системы координат;
- формированием граничных условий на основе условия задачи;
- записью и решением основного уравнения (уравнения Лапласа или для среды с объемным зарядом – уравнения Пуассона), а для задач с подвижными носителями заряда – соответствующей самосогласованной системы уравнений;
- нахождением постоянных интегрирования из граничных условий, анализом полученных результатов и, при необходимости более точного решения задачи, снятием некоторых допущений с последующим повторным решением.

Пример 2.1. Поле заряженного проводника. Пусть необходимо рассчитать распределение электрического поля, возникающего вокруг заряженного проводника, если задан его заряд. При выборе идеальной модели бесконечно длинного и тонкого провода с заданным зарядом ρ_l на единице длины удобно воспользоваться теоремой Гаусса, как в примере 1.3. Выбирая в качестве поверхности интегрирования соосный с проводом цилиндр с радиусом r и произвольной длиной Δl (рис. 2.1), можем воспользоваться осевой симметрией задачи. Силовые линии электрического поля, радиально расходясь от поверхности провода, будут коллинеарными с вектором $d\mathbf{S}$ на боковой поверхности цилиндра и перпендикулярны на его торцевых поверхностях. Поэтому поток вектора \mathbf{D} через поверхность цилиндра состоит только из потока через боковую поверхность и равен $2\pi r\Delta l D$. С другой стороны, заряд внутри цилиндра сосредоточен на проводнике и равен $\rho_l \Delta l$. Из их равенства получаем с учетом направления для вектора напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{e}_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|r|^2}. \quad (2.10)$$

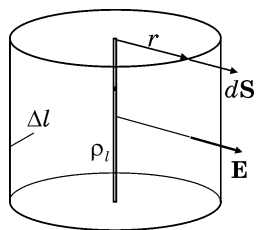


Рис. 2.1. Выбор объема и поверхности интегрирования для расчета поля заряженной нити определяется осевой симметрией задачи.

В декартовых координатах ($\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x x/r + \mathbf{e}_y y/r$)

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\mathbf{e}_x \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathbf{e}_y \frac{y}{x^2 + y^2} \right). \quad (2.11)$$

Пространственное распределение потенциала находится интегрированием (2.11)

$$V(r) = -\int \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C. \quad (2.12)$$

В декартовых координатах ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$):

$$V(x, y) = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C. \quad (2.13)$$

Здесь константа интегрирования может быть найдена, если задать значение потенциала в какой-либо точке. Но надо заметить, что в данной модели уединенного бесконечно тонкого провода не существует точки пространства, где удобно было бы выбрать потенциал равным 0.

Пример 2.2. Поле двух заряженных проводников. Для расчета распределения потенциала в пространстве около двух параллельных разноименно заряженных (с заданным зарядом $+\rho_l$ и $-\rho_l$ на единице длины) проводников бесконечной длины удобно воспользоваться *методом суперпозиции*. Для этого выберем расположение декартовой системы координат, как указано на рис. 2.2, а, и запишем выражения (2.13) для каждого проводника, сместив их на расстояния $\pm d$ соответственно:

$$\begin{aligned} V_+(x, y) &= -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + (y-d)^2} + C_+, \\ V_-(x, y) &= +\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + (y+d)^2} + C_-. \end{aligned} \quad (2.14)$$

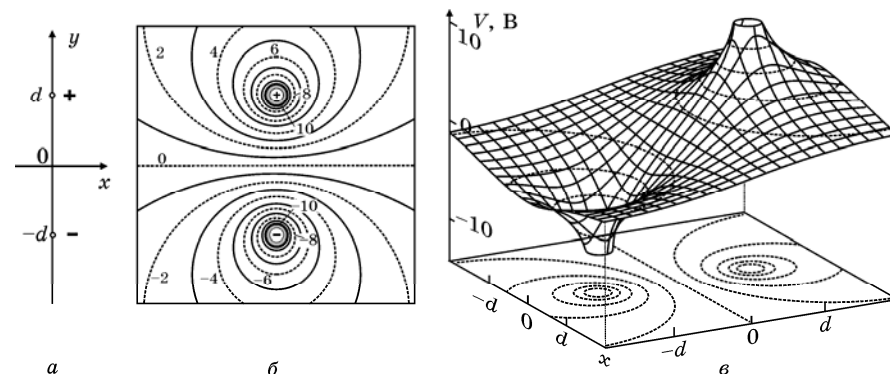


Рис. 2.2. Поле двух разноименно заряженных проводов (а) удобно изображать в виде эквипотенциальных линий (б), которые представляют собой линии равной «высоты» на потенциальной функции $V(x, y)$ (в). Распределение напряженности электрического поля удобно изображать в виде силовых линий или векторного поля (рис. 1.1).

Здесь индексы \pm соответствуют знаку заряда проводника. Результирующее поле находится суммированием этих выражений, причем общую константу $C_+ + C_-$ удобно выбрать равной 0, если принять нулевым потенциал в точке $y = 0$:

$$V(x, y) = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2 + (y+d)^2}{x^2 + (y-d)^2}. \quad (2.15)$$

Данное выражение позволяет найти потенциал любой точки пространства через заряд проводников. Распределение потенциала удобно изображать с помощью линий равного потенциала или *эквипотенциалей* (рис. 2.2, б), которые представляют собой линии равного уровня на «трехмерной» функции $V(x, y)$, представленной на рис. 2.2, в. Уравнение i -й эквипотенциали просто получается из последнего выражения, если в нем принять вместо $V(x, y)$ фиксированный потенциал V_i :

$$V_i = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2 + (y+d)^2}{x^2 + (y-d)^2}. \quad (2.16)$$

Обозначив для краткости записи $2\pi\epsilon_0 V_i \rho_i \equiv \alpha$, это уравнение можно представить в виде

$$x^2 + (y - d/\text{th}\alpha)^2 = (d/\text{sh}\alpha)^2. \quad (2.17)$$

Отсюда видно, что эквипотенциальные линии представляют собой окружности радиуса $d/\text{sh}\alpha$, смещенные наружу от точек $\pm d$ на расстояние $d/\text{th}\alpha$ (рис. 2.2, б).

Полученные результаты пригодны, строго говоря, только для бесконечно тонких проводников. Для проводов конечного сечения можно воспользоваться следующим приемом. Если задан радиус проводов a и потенциалы на них $\pm V_0$, то можно совместить поверхность проводов с эквипотенциалами $V_i = \pm V_0$, радиус которых равен $d/\text{sh}\alpha_0 = a$. Отсюда можно установить связь между потенциалом провода и зарядом на нем. Ограничиваясь для упрощения случаем тонких проводов ($d \gg a$), когда $\alpha_0 \gg 1$, $\text{th}\alpha_0 \approx 1$ и $\text{sh}\alpha_0 \approx (\exp \alpha_0)/2 = d/a$, получим

$$\rho_i = 2\pi\epsilon_0 V_0 / \ln(2d/a), \quad (2.18)$$

а распределение потенциала (2.15) запишем в виде:

$$V(x, y) = \frac{V_0}{2\ln(2d/a)} \ln \frac{x^2 + (y + d)^2}{x^2 + (y - d)^2}. \quad (2.19)$$

Из (2.18) получается еще один важный результат: коэффициент пропорциональности между зарядом на проводах ρ_i и напряжением $2V_0$ между ними есть емкость проводов единичной длины, которая называется *погонной емкостью*:

$$C_0 = \pi\epsilon_0 / \ln(2d/a), \quad (2.20)$$

Для более толстых проводников полученные результаты можно уточнить, если расстояние между проводами увеличить в соответствии со смещением эквипотенциалей $\pm V_0$.

Пример 2.3. Поле в плоском конденсаторе. Пусть надо рассчитать распределение электростатического поля и потенциала между пластинами плоского конденсатора. Рассмотрим идеализированную модель плоского конденсатора (рис. 2.3) в виде параллельных бесконечных пластин, что дает возможность не учитывать краевые эффекты и считать задачу одномерной.

Разместим ось x перпендикулярно к пластинам, выбрав начало координат на пластине с меньшим потенциалом, который примем равным нулю: $V(0) = 0$. Тогда вторая пластина, расположенная на расстоянии d , будет иметь потенциал $V(d) = V_0$, который равен приложенной между пластинами разности потенциалов. Поскольку пространственный заряд между пластинами отсутствует, задача сводится к решению одномерного уравнения Лапласа: $d^2V/dx^2 = 0$, решение которого имеет вид $dV/dx = C_1$ и $V(x) = C_1x + C_2$.

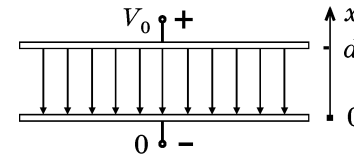


Рис. 2.3. Поле между пластинами плоского конденсатора (без учета краевых эффектов) однородно, то есть не зависит от пространственных координат.

Использование сформулированных граничных условий позволяет найти постоянные интегрирования: $C_2 = 0$ и $C_1 = V_0/d$. Следовательно, потенциал линейно возрастает от одной пластины к другой: $V(x) = V_0x/d$, а коэффициент пропорциональности численно равен напряженности электрического поля $E = V_0/d$. В векторной форме $\mathbf{E} = -\mathbf{e}_x V_0/d$.

В рассмотренной задаче напряженность поля не зависит от координат, и такое поле называется *однородным*.

Пример 2.4. Поле в цилиндрическом конденсаторе. Рассмотрим аналогичную задачу для цилиндрического конденсатора (рис. 2.4), который также условно будем считать бесконечно длинным, чтобы не учитывать краевых эффектов. В отличие от примера 2.1 рассмотрим решение этой задачи не с помощью теоремы Гаусса, а интегрируя уравнение Лапласа. При данной конфигурации электродов, которые будем считать коаксиальными, удобно воспользоваться цилиндрической системой координат с осью z , совпадающей с осью цилиндров. Так как очевидно, что $\partial/\partial z = \partial/\partial \varphi = 0$, уравнение Лапласа (выражение для оператора в цилиндрических координатах см. в приложении) примет вид

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0.$$

Поскольку r величина переменная, то нулю равна производная, а выражение в скобках постоянно, поэтому $dV/dr = C_1/r$ и $V(r) = C_1 \ln(r) + C_2$. Примем потенциал внешнего цилиндра $V(R_2) = 0$, тогда потенциал внутреннего $V(R_1)$ будет равен приложенной разности потенциалов V_0 . Используя эти условия как

граничные для нахождения постоянных интегрирования, получаем $C_1 = V_0/\ln(R_1/R_2)$, $C_2 = -C_1 \ln R_2$.

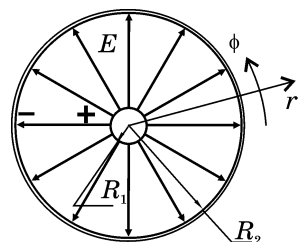


Рис. 2.4. Поле цилиндрического (коаксиального) конденсатора однородно по длине и полярному углу и убывает в радиальном направлении.

Итак, потенциал в цилиндрическом конденсаторе изменяется по логарифмическому закону:

$$V(r) = V_0 \frac{\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (2.21)$$

а напряженность поля спадает обратно пропорционально расстоянию от центра

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_r \frac{dV}{dr} = \mathbf{e}_r \frac{V_0}{\ln(R_2/R_1)} \cdot \frac{1}{r}, \quad (2.22)$$

Полезно отметить, что полученные распределения поля совпадают с результатами примера 2.1 для заряженной нити, однако здесь константы интегрирования получили определенность из-за удобства задания граничных условий.

Для расчета емкости между электродами коаксиального конденсатора необходимо установить связь между зарядом, например, на внутреннем проводе и его потенциалом. С этой целью воспользуемся третьим уравнением Максвелла в интегральной форме (1.15). В качестве поверхности интегрирования выберем цилиндрическую поверхность S , совпадающую с поверхностью внутреннего электрода длиной Δl . Так как на ней векторы \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$ коллинеарны и значение вектора $\mathbf{D}(R_1) = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}(R_1)$ одинаково во всех точках, то интегрирование сводится к умножению $\mathbf{D}(R_1) = \epsilon\epsilon_0 V_0/R_1 \ln(R_2/R_1)$ на площадь цилиндрической поверхности $S = 2\pi R_1 \Delta l$. Это произведение по теореме Гаусса равно заряду $\Delta q = \rho_l \Delta l$ на отрезке внутреннего электрода длиной Δl . Из этого равенства легко определяется коэффициент пропорциональности между зарядом на единице длины $\rho_l = \Delta q/\Delta l$ внутреннего электрода и потенциалом V_0 на нем:

$$C_0 = \frac{\rho_l}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}, \quad (2.23)$$

который и является погонной емкостью между коаксиальными проводниками цилиндрической конструкции.

Пример 2.5. Поле заряда над проводящей поверхностью.

Для расчета поля точечного заряда q , находящегося над металлической поверхностью на расстоянии a (рис. 2.5, а), можно использовать метод *зеркальных отображений*. Электрическое поле возникает между зарядом $+q$ и отрицательным зарядом, индуцированным на проводящей плоскости. Распределение этого заряда по поверхности изначально не известно, что и затрудняет непосредственный расчет. Но в соответствии с методом зеркальных отображений это поле будет таким же, как и поле между двумя зарядами: заданным зарядом и точечным отрицательным зарядом $-q$, который находится на таком же расстоянии a (рис. 2.5, б), но зеркально относительно поверхности.

Это подобие основано на том, что из-за симметрии задачи поверхность металла будет совпадать с эквипотенциальной поверхностью и силовые линии будут перпендикулярны плоскости симметрии, точно так же, как и силовые линии на поверхности проводника в соответствии с граничными условиями (пример 1.8).

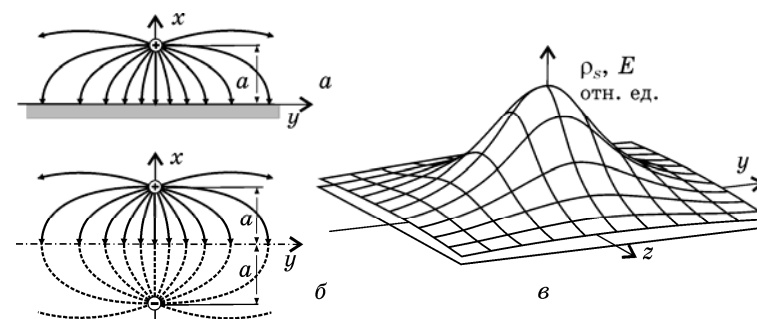


Рис. 2.5. Поле между точечным зарядом и индуцированным на металлической поверхности зарядом противоположного знака (а) рассчитывается так же, как и поле между двумя зарядами (б). Распределение плотности наведенного заряда по поверхности (в) таково, что объем фигуры равен заряду над поверхностью.

Расчитать поле между двумя зарядами можно, воспользовавшись, как и в примере 2.2, принципом суперпозиции, суммируя поля точечных зарядов $\pm q$ в форме

$$E_{\pm} = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\pm}|^2}, \quad (2.24)$$

где $\mathbf{r}_{0\pm} = \pm \mathbf{e}_x a$ – координаты их расположения (рис. 2.5, б).

Из результатов такого расчета интерес представляет распределение напряженности электрического поля в плоскости $y0z$:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_x \frac{aq}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.25)$$

Отсюда следует, во-первых, что в плоскости симметрии ($x = 0$), то есть и на металлической поверхности, напряженность поля будет иметь только нормальную составляющую. Во-вторых, это выражение определяет распределение (рис. 2.5, в) поверхностной плотности заряда $\rho_s = \epsilon_0 E_n$ (см. пример 1.8), а ее интегрирование по всей поверхности $y0z$ дает $\iint_{y0z} \rho_s dydz = -q$, то есть весь заряд,

индуцированный на поверхности металла, который равен по величине и противоположен по знаку заряду над поверхностью.

В электронике метод зеркальных отображений используется для нахождения формы потенциального барьера, существующего у поверхности вещества и препятствующего выходу электронов. Если электрон с зарядом $-e$ вышел из металла на расстояние x (рис. 2.6), то со стороны наведенного на поверхности заряда $+e$ на него действует возвращающая сила, которую зачастую и называют *силой зеркального отображения*

$$F(x) = -e^2/4\pi\epsilon_0(2x)^2 = -e^2/16\pi\epsilon_0 x^2. \quad (2.26)$$

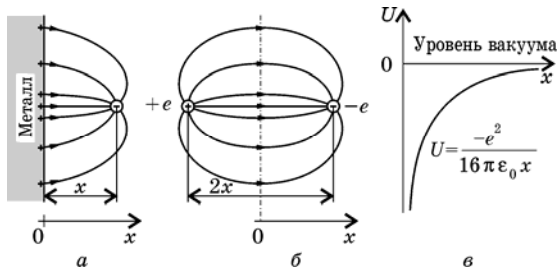


Рис. 2.6. На электрон, эмитированный из металла (а), действует возвращающая сила «зеркального отображения» (б), которая определяет форму потенциального барьера (в), препятствующего выходу.

Потенциальная энергия электрона равна работе по преодолению этой силы при его перемещении из данной точки на бесконечность и определяется интегрированием:

$$U(x) = \int_x^{\infty} F(x)dx = -e^2/16\pi\epsilon_0 x. \quad (2.27)$$

Полученная потенциальная функция (рис. 2.6, в) имеет естественное начало отсчета: $U(x) = 0$ при $x \rightarrow \infty$. Оно соответствует минимально возможной энергии свободного электрона в вакууме и называется *уровнем вакуума*. Эта функция описывает форму потенциального барьера, существующего вблизи поверхности и препятствующего выходу электронов из твердого тела. Работа, совершаемая электроном по преодолению сил этого барьера, называется *работой выхода*.

Пример 2.6. Пространственный заряд в плоском диоде. В качестве примера *самосогласованной задачи* рассмотрим, как изменяется поле в плоском конденсаторе (см. пример 2.3) при наличии между его пластинами пространственного заряда. Такая ситуация имеет место в вакуумном диоде, где электрическое поле создается не только источником анодного напряжения, но и зарядом электронов, эмитированных из катода и движущихся в межэлектродном пространстве к аноду.

Как и в примере 2.3, рассмотрим плоскую конструкцию бесконечно широких электродов (рис. 2.7, а), правый из которых является анодом, а левый (катод) является источником электронов с неограниченной эмиссией ($j_s = \infty$). Примем начало отсчета потенциала на катоде ($V(0) = 0$), тогда потенциал анода $V(d) = V_a$. Считая, что начальные скорости вылета электронов из катода равны 0 ($v(0) = 0$), мы должны также принять, что $dV/dx|_{x=0} = 0$. Иначе при ускоряющем поле ($dV/dx > 0$) все электроны достигали бы анода, а при тормозящем ($dV/dx < 0$) ни один электрон не попадал бы в межэлектродное пространство.

Математическая модель для анализа этой задачи совместно с граничными условиями для потенциалов на электродах включает уравнения:

$$\begin{cases} d^2V/dx^2 = -\rho(x)/\epsilon_0, \\ j = -\rho(x)/v(x), \\ v(x) = \sqrt{2(e/m)V(x)}, \end{cases} \quad (2.28)$$

которые представляют собой самосогласованную систему из уравнения Пуассона, уравнения непрерывности (отметим, что $j = \text{const}(x)$, т.е. плотность тока в любом сечении постоянна) и

уравнения движения электрона в статическом поле в виде связи скорости электрона и текущего потенциала, которая следует из (2.5).

Последовательная подстановка $\rho(x)$ и $v(x)$ в уравнение Пуассона приводит к уравнению

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{j}{\varepsilon_0 \sqrt{2(e/m)}} V^{-1/2},$$

которое после умножения левой и правой частей на $2dV/dx$ преобразуется к виду

$$d\left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{2j}{\varepsilon_0 \sqrt{2(e/m)}} V^{-1/2} dV.$$

Интегрируя от значений на катоде ($dV/dx|_{x=0}=0$, $V(0) = 0$) до текущих значений, получим

$$\frac{dV}{dx} = \sqrt{\frac{4j}{\varepsilon_0 \sqrt{2(e/m)}}} V^{1/4}.$$

Разделяя переменные и снова интегрируя в пределах от нулевых до текущих значений, получим функцию распределения потенциала

$$V(x) = \left(\frac{9j}{4\varepsilon_0 \sqrt{2(e/m)}}\right)^{2/3} x^{4/3}. \quad (2.29)$$

Отсюда могут быть получены и остальные распределения: напряженности поля — $E(x) \sim x^{1/3}$, скорости электронов — $v(x) \sim x^{2/3}$, плотности электронного заряда — $\rho(x) \sim -x^{-2/3}$.

Сравнивая полученное распределение поля с полем в «холодном» (т.е. без электронов) конденсаторе, видим (рис. 2.7, б), что присутствующие в межэлектродном промежутке электроны своим зарядом вызывают понижение потенциала и «провисание» функции $V(x)$ в отличие от ее линейного распределения в плоском конденсаторе. Электрическое поле также не будет однородным, его напряженность спадает от максимального значения на аноде до нулевого значения на катоде (рис. 2.7, в). Силовые линии не доходят до катода: начинаясь на аноде, они заканчиваются на электронах, создающих пространственный заряд. Плотность пространственного заряда, то есть и концентрация электронов, бесконечна на катоде, где скорость движения электронов равна

нулю, и постепенно уменьшается по мере ускорения электронов к аноду.

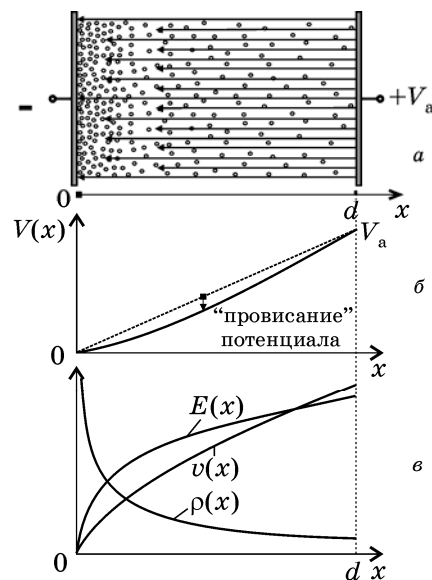


Рис. 2.7. Поле пространственного заряда электронов в вакуумном диоде (а) ослабляет поле внешнего источника и вызывает «провисание» распределения потенциала по сравнению с плоским конденсатором (б). Такое поле не будет однородным: распределение напряженности поля определяется видом распределений скорости и плотности заряда (в).

Полученные решения позволяют получить еще один важный результат. Из выражения (2.29) для распределения потенциала в точке $x = d$, где $V(d) = V_a$, можно получить выражение для плотности анодного тока

$$j = \frac{4\varepsilon_0 \sqrt{2e/m}}{9d^2} V_a^{3/2}. \quad (2.30)$$

Данное соотношение определяет вид вольтамперной характеристики вакуумного диода и обычно называется «законом степени 3/2». Для сравнения рассмотрим ее идеализированный вид (штриховая линия на рис. 2.8) без учета пространственного заряда. Если предположить, что все электроны вылетают из катода с нулевыми начальными скоростями, то при отрицательном анодном потенциале анодный ток будет отсутствовать. Но при любом, сколь угодно малом положительном потенциале анода, если электроны своим полем не влияют на движение друг друга, все они будут попадать на анод и создавать анодный ток, равный току эмиссии (режим насыщения). Подобное насыщение проявляется в диодах и при наличии пространственного заряда, если ток эмиссии из катода ограничен. Но до наступления насыщения наблюдается *ограничение тока пространственным*

зарядом, и в этом режиме имеется возможность управлять током изменением анодного напряжения.

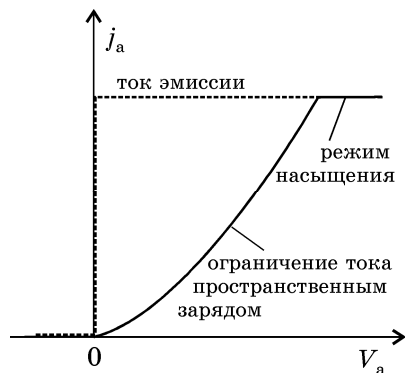


Рис. 2.8. Вольтамперная характеристика идеализированного вакуумного диода с ограниченной эмиссией электронов и без влияния их пространственного заряда должна иметь ступенчатый вид (штриховая линия). Пространственный заряд ограничивает анодный ток (сплошная линия) при его значении, меньшем тока эмиссии.

В реальных диодах электроны эмитируются с некоторыми начальными скоростями, зависящими от вида эмиссии, и возле катода образуется область отрицательного потенциала (рис. 2.9) с характерным минимумом V_{\min} и соответственно тормозящего электрического поля на участке между точками 0 и x_{\min} . Величина V_{\min} зависит как от начальных скоростей электронов, так и от поля внешнего источника. Именно эта область пространственного заряда, называемая иногда «виртуальным катодом», выполняет регулирующие функции в режиме ограничения тока пространственным зарядом. Преодолеть область тормозящего поля могут только те электроны, начальная энергия вылета которых (в направлении оси x) $mv^2(0)/2 > eV_{\min}$.

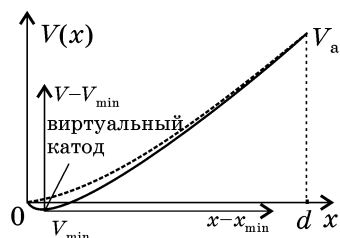


Рис. 2.9. При конечных значениях скорости вылета электронов у катода образуется потенциальный минимум с участком тормозящего поля, регулирующего величину анодного тока.

Увеличение анодного напряжения ослабляет тормозящее поле пространственного заряда, уменьшая значение V_{\min} и увеличивая количество электронов, преодолевающих тормозящее действие поля и создающих анодный ток. В этих условиях «закон степени 3/2» не выполняется, но рассмотренная модель может служить хорошим приближением для области $x > x_{\min}$, если анодный потенциал отсчитывать от минимума потенциала

«виртуального катода» (см. дополнительную координатную систему на рис. 2.9).

Следует отметить, что данный закон оказывается справедливым не только для плоской конструкции, он достаточно универсален и используется как основа для моделирования управления током во многих вакуумных приборах.

Пример 2.7. Экранирование внешнего поля поверхностью проводящего вещества. В примере 1.8, где рассматривались граничные условия для электрического поля у поверхности идеального металла, использовалась модель бесконечно тонкого слоя поверхностного заряда, который экранирует внутреннюю область от внешнего электрического поля. В реальных условиях этот заряд концентрируется в приповерхностном слое конечной толщины. Для формирования физической модели поместим в плоский конденсатор с однородным электрическим полем (рис. 2.10, а) образец проводящего вещества, в котором проводимость обеспечивается электронами. Под действием поля внешнего источника электроны будут смещаться к поверхности до тех пор, пока внутреннее поле, вызванное смещением зарядов, полностью не скомпенсирует внешнее. Образующийся у поверхности пространственный заряд, который и экранирует внешнее поле, будет определяться превышением концентрации электронов $n(x)$ над ее значением n_0 при отсутствии поля, а их объемная плотность заряда будет равна

$$\rho(x) = -e[n(x) - n_0]. \quad (2.31)$$

Распределение электронов в пространстве $n(x)$ определяется совместным действием двух факторов: с одной стороны, электрическое поле будет притягивать их к поверхности, а с другой, тепловое хаотическое движение будет приводить к их диффузии от поверхности. При уравнивании этих процессов распределение концентрации $n(x)$ может быть описано распределением Больцмана

$$n(x) = n_0 \exp[eV(x)/kT]. \quad (2.32)$$

Соотношения (2.31) и (2.32) совместно с уравнением Пуассона $d^2V/dx^2 = -\rho(x)/\epsilon\epsilon_0$ представляют собой самосогласованную систему уравнений. В качестве граничных условий выберем начало отсчета потенциала вдали от поверхности ($V(\infty) = 0$) и будем считать заданным потенциал поверхности $V(0) = V_s$. Подставляя $\rho(x)$ и $n(x)$ в уравнение Пуассона, получим

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{en_0}{\epsilon\epsilon_0} \{\exp[eV(x)/kT] - 1\}$$

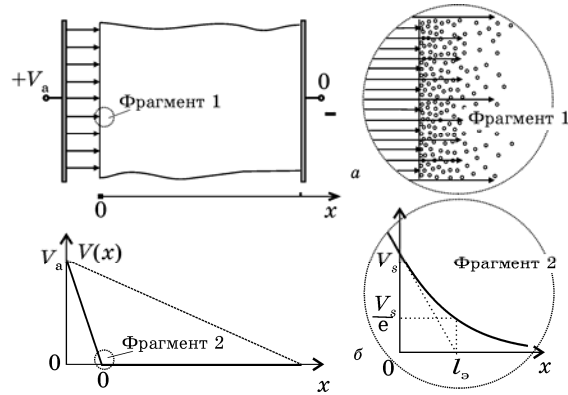


Рис. 2.10. Силовые линии внешнего электрического поля заканчиваются на слое поверхностного заряда, не проникая внутрь проводящего вещества. В кружках показано распределение поля и заряда в приповерхностном слое в увеличенном масштабе.

Для упрощения решения ограничимся случаем, когда потенциал $V(x) \ll kT/e$ и можно принять, что $e^\alpha \approx 1 + \alpha$ (величину kT/e иногда называют *тепловым потенциалом*). При таком допущении последнее уравнение упростится

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{e^2 n_0}{\epsilon\epsilon_0 kT} V(x),$$

а его решение при заданных граничных условиях можно представить в виде:

$$V(x) = V_s \exp(-x/l_s). \quad (2.33)$$

Здесь введена как обозначение так называемая *длина экранирования*

$$l_s = \sqrt{\epsilon\epsilon_0 kT / e^2 n_0}, \quad (2.34)$$

которая характеризует скорость экспоненциального убывания (рис. 2.10, б) функции $V(x)$ и является мерой глубины проникновения электрического поля в вещество. На расстоянии l_s поверхностный потенциал убывает в $e \approx 2,7$ раз, а на расстоянии

$(3...5)l_s$ электрическое поле считается обычно пренебрежимо малым.

Количественная оценка для металлов с концентрацией электронов $10^{28}...10^{29} \text{ м}^{-3}$ дает значения длины экранирования порядка межатомного расстояния, что с макроскопической точки зрения вполне оправдывает модель бесконечно тонкого слоя заряда, рассмотренную в примере 1.8. Для полупроводников с концентрацией $10^{22}...10^{20} \text{ м}^{-3}$ она составляет $0,1...1 \text{ мкм}$.

Еще одна интерпретация величины l_s следует из рассмотрения избыточной концентрации электронов

$$\Delta n(x) = n(x) - n_0 \approx (en_0/kT)V(x) = \Delta n_s \exp(-x/l_s), \quad (2.35)$$

создающих пространственный заряд (рис. 2.11). Здесь $\Delta n_s = en_0 V_s / kT$ — концентрация избыточных электронов на поверхности. Особенность этой функции состоит в том, что

$$\int_0^\infty \Delta n(x) dx = \Delta n_s l_s.$$

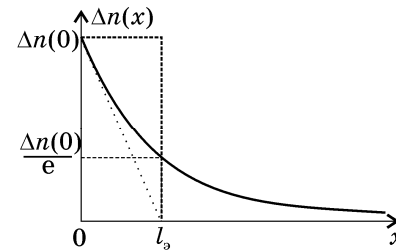


Рис. 2.11. Плавное распределение избыточной концентрации электронов (сплошная линия) может быть заменено ступенчатой (штриховая линия) с концентрацией, равной поверхностному значению, и толщиной слоя, равной длине экранирования.

Этот результат позволяет вместо реального распределения заряда использовать упрощенное представление о том, что все электроны расположены равномерно с плотностью Δn_s , но только в приповерхностном слое толщиной l_s (штриховая линия на рис. 2.11).

Важный результат проведенного анализа связан также с тем, что величина поверхностного заряда зависит от поверхностного потенциала V_s , что может использоваться для управления поверхностной проводимостью.

В аналитических расчетах электрического поля при недостаточно сложной конфигурации электродов с заданными граничными условиями эффективным может оказаться *метод разделения переменных*. Суть этого метода состоит в том, что неизвестную функцию распределения потенциала представляют

как произведение функций, каждая из которых зависит только от одной координаты. Если подставить $V(x, y) = X(x)Y(y)$ (рассмотрим для упрощения двумерный случай) в уравнение Лапласа и разделить на произведение XY , получим

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Сумма двух независимых между собой функций может равняться нулю только в том случае, когда каждая из них постоянна. Поэтому, обозначая первое слагаемое k_x^2 , второе $-k_y^2$, получим

$$d^2 X/dx^2 - k_x^2 X = 0;$$

$$d^2 Y/dy^2 - k_y^2 Y = 0.$$

Здесь k_x и k_y – так называемые *постоянные разделения*, для которых справедливо соотношение $k_x^2 + k_y^2 = 0$ и которые затем определяются из дополнительных условий.

В результате одно уравнение в частных производных сводится к двум обычным дифференциальным уравнениям, решение которых значительно проще.

Пример 2.8. Поле сетки над проводящей поверхностью.

Представим сетку (рис. 2.12, а) в виде тонких проводников, параллельных проводящей плоскости, расположенных на расстоянии a друг от друга и на расстоянии d от плоскости. Для использования метода разделения переменных в этой задаче отметим, что из-за периодичности структуры распределение поля также будет периодической функцией координаты x . Поэтому распределение потенциала при $y = \text{const}$ можно представить в виде суммы гармонических функций. Если выбрать расположение координатной системы так, чтобы начало оси x проходило через центр проводника, как на рис. 2.11,а, то можно ограничиться только четными функциями типа $\cos k_n x$, причем для каждой гармоники необходима своя функция $Y_n(y)$. В итоге распределение потенциала представим в виде:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \cos k_n x. \quad (2.36)$$

Из условия периодичности потенциала $V(x, y) = V(x + a, y)$ следует, что $\cos k_n x = \cos k_n(x + a)$ и $k_n a = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), откуда находим константы разделения $k_n = 2\pi n/a$. Подставляя

(2.36) в уравнение Лапласа и выполняя описанную процедуру разделения переменных, получим для каждой из функций $Y_n(y)$

$$d^2 Y_n/dy^2 - k_n^2 Y_n = 0. \quad (2.37)$$

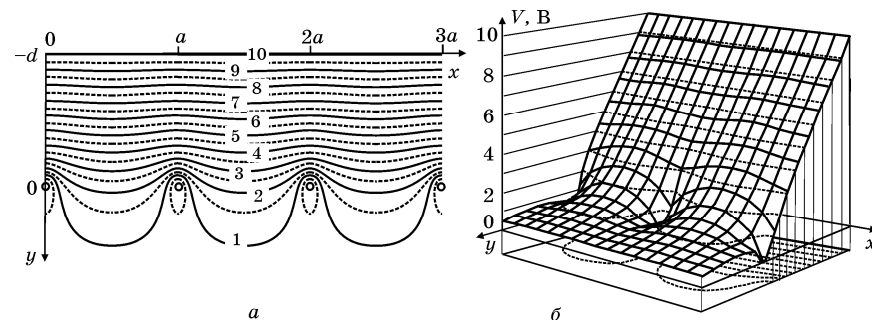


Рис. 2.12. Распределение поля между сеткой и плоским электродом, представленное в виде эквипотенциалей с шагом 0,5 В (а), и соответствующий потенциальный рельеф в косоугольной проекции (б). Поле проникает в пространство за сеткой на расстояние порядка шага сетки.

Решение этого уравнения запишем в виде

$$Y_n(y) = C_{1n} \exp(-k_n y) + C_{2n} \exp(+k_n y). \quad (2.38)$$

Для $n = 0$ уравнение (2.37) имеет особое решение. Оно принимает вид $d^2 Y_0/dy^2 = 0$ и, как поле в плоском конденсаторе, описывает линейную составляющую потенциала:

$$Y_0(y) = C_{10} y + C_{20}. \quad (2.39)$$

При заданных потенциалах на электродах (пусть сетка имеет нулевой потенциал, т.е. $V(0, 0) = 0$, а металлическая поверхность некоторый положительный $-V(x, -d) = V_a$) легко определить, что $C_{20} = 0$, $C_{10} = -V_a/d$, а $Y_0(y) = -V_a y/d$. Очевидно также, что для области над сеткой ($y \rightarrow \infty$) необходимо принять, что коэффициенты $C_{2n} = 0$, так как потенциал там не может бесконечно возрастать. В пространстве между плоскостью и сеткой можно сократить количество постоянных, если найти связь между константами C_{1n} и C_{2n} из условия $V(x, -d) = V_a$. Дальнейшее нахождение постоянных интегрирования весьма затруднительно, для этого надо задавать конкретную форму поперечного сечения проводников сетки. Но даже без такой процедуры можно сделать полезные выводы.

Поле положительного электрода проникает в пространство над сеткой, экспоненциально спадая по закону $\exp(-k_n y)$. Скорость спада определяется константой разделения k_n , и расстояние, на которое проникает поле, составляет величины порядка $1/k_n = a/2\pi l$ и обратно пропорционально номеру пространственной гармоники n . На рис. 2.12, а представлена картина поля в виде эквипотенциалей, рассчитанная для нулевого потенциала сетки и $V_a = 10$ В. Они представляют собой линии равного потенциала на «трехмерной» функции $V(x, y)$, изображенной на рис. 2.12, б. На расстоянии от сетки, равном ее периоду, первая гармоника ослабляется в $e^{2\pi}$ раз, а остальные гармоники убывают еще быстрее. Такое свойство говорит о высоком качестве экранирования сеткой внешних полей. Кроме того, проникновение поля через сетку используют для управления электронными потоками в вакуумных приборах.

Пример 2.9. Поле обедненного слоя в полупроводнике. Обедненный слой образуется во многих полупроводниковых приборах: МДП-структурах, вблизи некоторых контактов металл-полупроводник, у границы контакта различных полупроводников и др. В качестве модельного объекта рассмотрим образец полупроводника (рис. 2.13, а) с донорной примесью, атомы которой при комнатной температуре, отдавая свой «лишний» электрон, становятся положительно заряженными ионами. При создании на поверхности каким-либо образом отрицательного потенциала V_s (например, с помощью внешнего источника, как на рис. 2.10, а) электроны вытесняются из приповерхностной области, и там образуется обедненный ими слой.

При потенциалах V_s порядка десятых долей или единиц вольт зарядом подвижных электронов можно пренебречь, и объемная плотность заряда будет определяться только концентрацией ионов примеси: $\rho = eN$. Если считать, что примесь распределена в полупроводнике макроскопически равномерно, то соответствующее уравнение Пуассона будет иметь постоянную правую часть. В одномерном случае $-d^2V/dx^2 = -eN/\epsilon\epsilon_0$. Интегрируя, получим $dV/dx = -(eN/\epsilon\epsilon_0)x + C_1$, $V(x) = -(eN/2\epsilon\epsilon_0)x^2 + C_1x + C_2$. Для нахождения констант интегрирования примем начало отсчета потенциала на границе обедненной и нейтральной областей [$V(d) = 0$] и будем считать известным потенциал поверхности [$V(0) = V_s < 0$]. Кроме того, для определения пока неизвестной толщины обедненного слоя необходимо использовать еще одно условие – напряженность поля на границе областей спадает до 0 [$dV/dx|_{x=d} = 0$]. В результате можно получить (рис. 2.14), что вектор напряженности электрического поля направлен от заряженных ионов примеси к поверхности и уменьшается линейно (б):

$$E(x) = -e_x \frac{dV}{dx} = -e_x \frac{eN}{\epsilon\epsilon_0}(d-x), \quad (2.40)$$

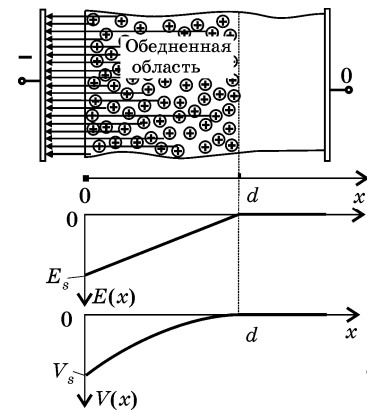


Рис. 2.13. Обедненный электронами слой (а) пространственного заряда у поверхности донорного полупроводника и распределение напряженности электрического поля (б) и потенциала (в).

потенциал параболически возрастает (в) от значения $V_s < 0$ до 0:

$$V(x) = -\frac{eN}{2\epsilon\epsilon_0}(d-x)^2, \quad (2.41)$$

а толщина обедненной области и поверхностный потенциал связаны соотношением $V_s = -eNd^2/2\epsilon\epsilon_0$. Отсюда следует, что

$$d = \sqrt{2\epsilon\epsilon_0|V_s|/eN}, \quad (2.42)$$

и толщина тем меньше, чем больше концентрация примеси, а также зависит от поверхностного потенциала. Этот факт используется для управления проводимостью поверхностного слоя.

2.1.4. Численный расчет электростатических полей.

В большинстве рассмотренных примеров результаты расчета распределения поля получены в виде аналитических функций, которые позволяют найти потенциал или напряженность поля в любой точке пространства (за исключением, быть может, некоторых особых точек). Однако при более сложной конфигурации электродов аналитический расчет становится практически невозможным и приходится использовать так

называемые *численные методы интегрирования* уравнений Лапласа или Пуассона. Они позволяют приближенно рассчитать поле в определенных дискретных точках пространства, причем количество точек и точность расчета в них можно выбирать любыми, в зависимости от необходимой степени детализации поля и трудоемкости расчетов.

Одним из наиболее распространенных является *метод конечных разностей*. В основу метода положена замена производных в уравнении Лапласа малыми приращениями. Рассмотрим его для плоского поля $V(x, y)$. Придавая поочередно аргументам x и y некоторой непрерывной функции $V(x, y)$ малые приращения с шагом h , можно приближенно (с точностью до величин второго порядка малости относительно h^2) заменить частные производные функции отношениями разностей (рис. 2.14):

$$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \begin{cases} [V(x, y) - V(x - h, y)] / h & \text{— слева,} \\ [V(x + h, y) - V(x, y)] / h & \text{— справа,} \end{cases} \quad (2.43a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \approx \begin{cases} [V(x, y) - V(x, y - h)] / h & \text{— внизу,} \\ [V(x, y + h) - V(x, y)] / h & \text{— вверх.} \end{cases} \quad (2.43б)$$

Подобным образом через приращения первых производных можно записать для частных производных второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h} \left[\frac{V(x + h, y) - V(x, y)}{h} - \frac{V(x, y) - V(x - h, y)}{h} \right] = \\ &= [V(x + h, y) + V(x - h, y) - 2V(x, y)] / h^2; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \approx [V(x, y + h) + V(x, y - h) - 2V(x, y)] / h^2;$$

При этом двумерное дифференциальное уравнение Лапласа

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 = 0$$

приближенно заменяется следующим алгебраическим уравнением:

$$V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+h) + V(x, y-h) - 4V(x, y) = 0. \quad (2.44)$$

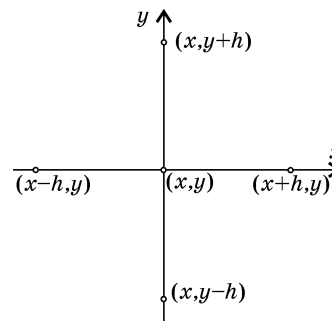


Рис. 2.14. Пятиточечная схема для вычисления производных через конечные приращения и расчета потенциалов.

Данное разностное уравнение связывает между собой значения искомой функции в пяти соседних точках, расположенных как указано на рис. 2.14. Простой физический смысл этого уравнения получим, если представить его в форме

$$V(x, y) = [V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+h) + V(x, y-h)] / 4, \quad (2.45)$$

— потенциал в каждой точке пространства равен среднему арифметическому значению потенциалов в соседних точках. Стоит заметить, что такое простое представление уравнения Лапласа получается только в прямоугольных координатах при равных приращениях (шагах) по осям x и y , и в других случаях оно имеет другой вид.

Порядок действий для организации расчета может быть следующим.

Выбор области интегрирования, где рассчитывается поле, это наиболее трудно формализуемая часть алгоритма. Самой простой и удобной является прямоугольная область, в границах которой локализовано поле. Это может быть, например, некоторая область полупроводникового прибора (рис. 2.15, а) с расположенными там электродами. Если поля не сильно локализованы в некоторой области пространства, например, при расчете поля системы зарядов, можно ввести некоторый дополнительный электрод с нулевым потенциалом (рис. 2.15, б), «обрезающий» поле на таком удалении от зарядов, где потенциал пренебрежимо мал, либо установить свободную границу (рис. 2.15, в), на которой поле достаточно слабое, а потенциал изменяется медленно.

Естественно, что при выборе области интегрирования следует учитывать симметрию конструкции и заданных потенциалов (электрического поля). Важно, чтобы выбранная модель электродов не сильно искажала поле по сравнению с полем в реальном объекте.

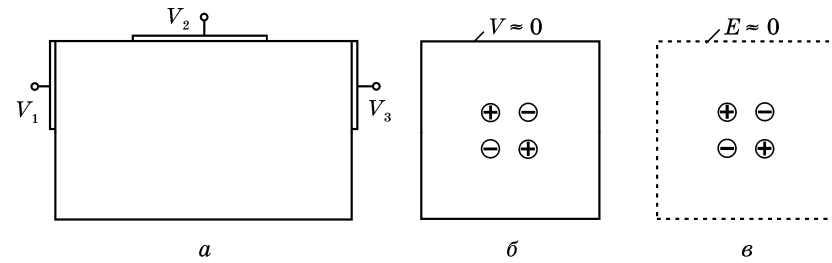


Рис. 2.15. Область численного расчета поля может быть ограничена естественными границами полупроводника (а), введением экранирующего электрода (б) там, где потенциал можно считать нулевым, или свободной границей (в), где напряженность поля пренебрежимо мала.

Дискретный массив точек, в которых рассчитывается потенциал, определяется точками пересечения (узлами) линий сетки, которая строится в области интегрирования. Количество узлов сетки определяется как необходимой степенью детализации поля, так и требуемой погрешностью расчета, и обычно составляет величины порядка 10...100 по каждой координате. В простейшем случае шаг сетки выбирается постоянным и одинаковым по осям x и y (рис. 2.16, а). Но иногда шаг сетки делают переменным, так чтобы в тех областях, где потенциал изменяется быстрее, шаг был мельче (рис. 2.16, б).

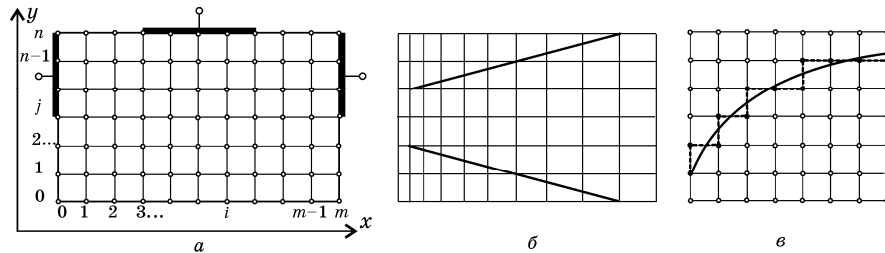


Рис. 2.16. Дискретизация пространства интегрирования с помощью сетки с постоянным шагом (а). В области более сильного поля (б) шаг сетки может быть выбран более мелким. Электроды сложного профиля (в) заменяются дискретным набором ближайших узлов.

Для составления основной части системы уравнений необходимо для всех внутренних узловых точек, не совпадающих с электродами и не расположенных на границе области интегрирования, то есть для точек с номерами (на примере конструкции рис. 2. 16, а) $i = 1, \dots, (m - 1)$ и $j = 1, \dots, (n - 1)$ записать уравнение (2.44) в виде

$$4V_{i,j} + V_{(i-1),j} + V_{(i+1),j} + V_{i,(j-1)} + V_{i,(j+1)} = 0. \quad (2.46)$$

Это уравнение при изменяющихся i и j представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, которую надо решить, дополнив ее соотношениями для расчета потенциалов в остальных точках, где, как правило, (2.46) не может быть использовано. К таким точкам относятся узлы, где потенциалы фиксированы напряжением источников питания, и узлы на границе области интегрирования, для которых не существует четырех соседних узлов. В таких точках необходимо вводить другие правила для расчета потенциалов, так называемые граничные условия.

Граничные условия существуют двух видов. Условия Дирихле предполагают присвоение узловым точкам, совпадающим с электродами, известных значений потенциалов этих электродов. Если электроды имеют сложный профиль, то их можно заменить ломаной линией, которая проходит по узлам сетки и отклоняется от действительной формы менее, чем на половину шага сетки (рис. 2.16, в).

В другом виде граничных условий, условиях Неймана, принимают равенство нулю производной от потенциала в направлении нормали \mathbf{n} к границе: $\partial V / \partial \mathbf{n} = 0$. Они приблизительно выполняются на границе полупроводник-воздух (см. разд. 1.5); для осей симметрии, где функция $V(\mathbf{n})$ имеет максимум или минимум, это условие точное. Его также приблизительно используют на таком удалении от электродов, где поле слабое и изменением потенциала можно пренебречь при выбранной точности расчетов.

Реализовать эти условия при вычислениях можно различными способами. Во-первых, можно присвоить граничным точкам значения потенциалов приграничного ряда. Например, для левой границы (рис. 2. 16, а) $V_{0,j} = V_{1,j}$, для нижней границы $V_{i,0} = V_{i,1}$, и т.п.

Во-вторых, мысленно дополнив сетку еще одним рядом узлов за пределами области интегрирования (рис. 2. 17, а), присваиваем им потенциал граничных точек ($V_{-1,j} = V_{0,j}$). Применение (2.46) в этой уже пятиточечной схеме к граничным узлам дает следующее правило для вычисления потенциала в них

$$V_{0,j} = (V_{1,j} + V_{0,(j-1)} + V_{0,(j+1)}) / 3. \quad (2.47)$$

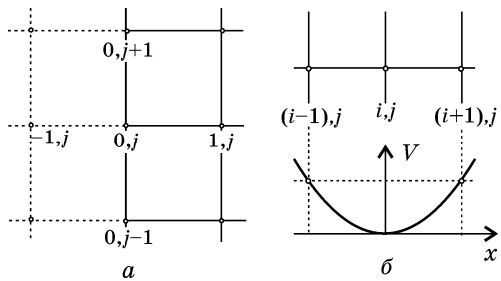


Рис. 2.17. Способы учета граничных условий у поверхности полупроводника (а) и на оси симметрии (б), основанные на равенстве нулю производной вдоль нормали.

В-третьих, расчет на границе можно производить так же, как и на оси симметрии (рис. 2. 17, б), где производная в направлении оси также равна 0, а симметричные потенциалы одинаковы. Поэтому $V_{(i-1),j} = V_{(i+1),j}$, а для граничных точек

$$V_{0,j} = (2V_{1,j} + V_{0,(j-1)} + V_{0,(j+1)})/4. \quad (2.48)$$

Выбор той или иной формы граничных условий Неймана определяется в основном удобством программирования процедуры вычислений.

Решение системы уравнений (2.46), дополненной граничными условиями, можно производить одним из довольно многочисленных методов. При поиске наиболее эффективного метода необходимо принять во внимание, что матрица коэффициентов этой системы будет сильно разреженной: так как в (2.46) потенциал в каждой точке связан только с потенциалами в четырех соседних точках, то в матрице будет много нулевых коэффициентов.

Широко распространенным и поучительным при ручных расчетах является итерационный метод (метод последовательных приближений). Прежде всего, задаются произвольными начальными значениями потенциала во всех внутренних узлах и на свободных границах, где требуется рассчитывать потенциалы. Этот массив значений $V_{i,j}^{(0)}$ вместе с потенциалами на электродах составляет так называемое нулевое приближение. Затем рассчитывают новые значения потенциалов во всех внутренних узлах сетки по формуле (2.46), а на свободных границах в соответствии с той или иной формой условий Неймана, и получают первое приближение. Используя рассчитанные потенциалы $V_{i,j}^{(1)}$ и граничные значения, находят функции $V_{i,j}^{(2)}$ второго приближения и т.д. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока $(n + 1)$ -е приближение не даст значений потенциала во всех узлах, которые совпадают (в пределах заданной точности) с n -м приближением. Следует иметь в виду, что чем точнее будет выбрано нулевое приближение, тем быстрее будет идти процесс сходимости и, соответственно, меньшее количество итераций

потребуется для достижения необходимой точности. Этому же способствует и порядок прохождения узлов при пересчете: следует двигаться от электродов, где заданы потенциалы, к свободным границам.

Весьма эффективно для уменьшения временных затрат использовать при организации вычислений следующий прием: сначала решение следует находить при малом количестве клеток сетки, размер которых определяется приблизительно с таким расчетом, чтобы в каждой части области интегрирования было не меньше двух строк клеток. Затем решение уточняют, уменьшая шаг сетки вдвое, затем вчетверо и т.д. по всей области или в той ее части, где желательно иметь более точное решение (рис. 2.18, а).

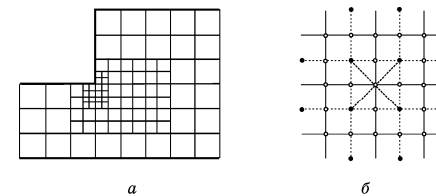


Рис. 2.18. Деление шага сетки пополам может быть произведено в отдельной локальной области (а), где поле более сильное. Пятиточечная схема (б) для нахождения нулевого приближения для более мелкой сетки через рассчитанные значения потенциалов в узлах (темные точки) крупной сетки.

При этом предыдущее решение используется для получения нулевого приближения для вычислений с более мелкой сеткой. Для нахождения нового нулевого приближения в недостающих точках может использоваться то же правило (2.46) пятиточечной схемы, но в качестве «соседних» выбираются уже рассчитанные значения потенциалов в узлах, расположенных по диагонали (рис. 2.18, б).

Расчет напряженности электрического поля производится по соотношениям $E_x = -\partial V/\partial x$, $E_y = -\partial V/\partial y$, которые приближенно вычисляются по конечным разностям (2.43). Используя значения производных слева и справа, можно найти среднее арифметическое

$$E_{x\ i,j} = (V_{(i-1),j} - V_{(i+1),j})/2h. \quad (2.49a)$$

Аналогично

$$E_{y\ i,j} = (V_{i,(j-1)} - V_{i,(j+1)})/2h. \quad (2.49б)$$

Однако, в некоторых случаях, удобно использовать дополнительную полевую сетку, которая сдвинута относительно потенциальной на $h/2$ (рис. 2.19) вверх и вправо. Значения составляющих напряженности в центре выделенной на рисунке клетки можно определить по рассчитанным потенциалам в ближайших узлах потенциальной сетки:

$$E_x = (V_{i,j} - V_{(i+1),j} + V_{i,(j+1)} - V_{(i+1),(j+1)})/2h, \quad (2.50a)$$

$$E_y = (V_{i,j} - V_{i,(j+1)} + V_{(i+1),j} - V_{(i+1),(j+1)})/2h. \quad (2.50б)$$

Эти значения присваиваются всему пространству внутри полевой клетки для дальнейшего расчета движения зарядов.

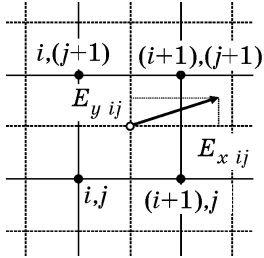


Рис. 2.19. Определение напряженности поля в узле полевой сетки (штриховые линии) по найденным значениям потенциалов в ближайших узлах потенциальной сетки (сплошные линии).

Визуализация результатов расчета необходима для интегрального восприятия большого массива чисел и представления о полученной функции распределения потенциала или напряженности поля.

Потенциальная функция часто изображается с помощью линий равного потенциала или *экипотенциалей* с указанными на них значениями потенциала. Для этого весь диапазон изменения потенциала разбивается на равные интервалы, и соединяются точки с одинаковыми потенциалами. Естественно, что для нахождения определенного значения на каждой линии сетки необходимо использовать те или иные методы интерполяции. Примеры такого построения приведены на рис. 2.2, б и 2.12, а.

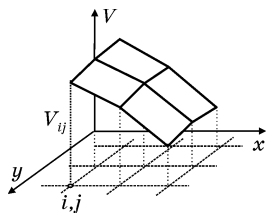


Рис. 2.20. Фрагмент построения потенциальной поверхности.

Другой распространенный способ состоит в построении «трехмерной» потенциальной поверхности. Для этого в какой-либо из косоугольных систем координат строится пространственная сетка (рис. 2.20) и в каждом из узлов по вертикальной оси в определенном масштабе восстанавливается рассчитанное значение потенциала. Полученные соседние точки затем соединяются в простейшем случае прямыми линиями. Результаты такого построения приведены на рис. 2.2, в и 2.12, б. Там же изображены линии равного уровня этих поверхностей, которые и являются экипотенциальными линиями.

Распределение напряженности электрического поля проще всего изображать в виде векторного поля, где для каждого узла по рассчитанным проекциям $E_{x ij}$ и $E_{y ij}$ в выбранном масштабе строится вектор напряженности E_{ij} . Пример такого представления приведен на рис. 1.1, б.

2.2. МАГНИТОСТАТИКА

2.2.1. Основные уравнения магнитостатики

Магнитостатика изучает магнитные поля, не изменяющиеся, во времени. Реально статическими считают такие поля, напряженность которых не изменяется существенно за время наблюдения, поэтому уравнения магнитостатики непосредственно следуют из первого и четвертого уравнений Максвелла, если в них принять $\partial/\partial t = 0$:

дифференциальная форма	интегральная форма	
$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j},$	$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{j} d\mathbf{S}$	(2.51)
$\text{div } \mathbf{B} = 0,$	$\oint_s \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$	

Важным свойством магнитостатического поля является то, что оно не совершает работы при свободном движении заряда. Чтобы это показать, умножим скалярно обе части уравнения движения частицы в магнитном поле $d(m\mathbf{v})/dt = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ на вектор скорости \mathbf{v} и учтем, что $\mathbf{v}d(m\mathbf{v}) = d(mv^2/2) = dE_k$, а $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\mathbf{v} \equiv 0$, где E_k – кинетическая энергия заряда q . Следовательно,

$$dE_k/dt = 0, \quad (2.52)$$

и изменения кинетической энергии не происходит. Связано это с тем, что сила Лоренца $F_L = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ перпендикулярна скорости \mathbf{v} частицы и не вызывает ускорения *вдоль траектории*, а только искривляет ее.

Технически такие поля создаются постоянными магнитами или электрическими токами, протекающими в проводящих средах. В первом случае отсутствуют макроскопические токи ($\mathbf{j} = 0$), и магнитостатическое поле описывается уравнениями

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0 \quad (2.53)$$

Это означает, что магнитоэстатическое поле является безвихревым и по характеру пространственного распределения подобно электростатическому полю. Такое свойство дает возможность рассчитывать распределение магнитного поля для некоторой скалярной функции, вводя понятие *магнитоэстатического потенциала* $V_m(\mathbf{r})$, связав его с напряженностью магнитного поля, соотношением (2.3)

$$\mathbf{H} = -\text{grad } V_m(\mathbf{r}). \quad (2.54)$$

Подстановка (2.54) в уравнение $\text{div } \mathbf{B} = 0$ с учетом тождества $\text{div grad } f = \nabla^2 f$ приводит к уравнению Лапласа для магнитоэстатического потенциала

$$\nabla^2 V_m = 0. \quad (2.55)$$

Использование магнитоэстатического потенциала позволяет при расчетах распределений магнитного поля использовать хорошо отработанные методы решения (в том числе и численного) уравнения Лапласа, а также аналогии с распределением электростатических полей при подобных граничных условиях.

Надо помнить, что магнитоэстатический потенциал не имеет такого физического смысла, связанного с работой, как электростатический; магнитное поле не совершает работы над зарядом.

Магнитные поля, создаваемые постоянными электрическими токами, не совсем корректно называть статическими, так как ток вызван движением зарядов. Более уместно их называть стационарными. В соответствии с первым уравнением из (2.51) такие поля не являются безвихревыми или потенциальными. Но и в этом случае, учитывая второе уравнение из (2.51) и тождество $\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) \equiv 0$, можно ввести понятие *векторного магнитного потенциала* \mathbf{A} через соотношение

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (2.56)$$

Если подставлять (2.56) в первое уравнение (2.51) в дифференциальной форме, то в левой его части будет выражение $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$. Здесь надо иметь в виду, что вектор \mathbf{A} введен через дифференциальное соотношение, поэтому изменение его на любую константу не влияет на величину \mathbf{B} . Более того, прибавление к вектору \mathbf{A} любого градиентного поля $V(\mathbf{r})$ также не меняет вектора $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, так как $\text{rot}(\text{grad } V) \equiv 0$. Это позволяет наложить на вектор \mathbf{A} некоторое дополнительное

условие, упрощающее расчет поля. Обычно для магнитоэстатических полей выбирают

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (2.57)$$

При таком выборе первое уравнение (2.51) упрощается и принимает вид

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.58)$$

В итоге для векторного магнитного потенциала мы получили уравнение Пуассона, которое в отличие от электростатического является векторным, эквивалентным трем скалярным. Естественно, возникает вопрос о преимуществах использования вектора \mathbf{A} при расчетах распределения индукции $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ или напряженности $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ магнитного поля. Во-первых, решение уравнения Пуассона (2.58) может быть получено, как и для электростатического потенциала, в общем виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.59)$$

При заданном распределении токов в пространстве интегрирование (2.59) может оказаться проще, чем интегрирование дифференциального уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$. Во-вторых, вычисление потока вектора индукции через некоторую поверхность требует нахождения поверхностного интеграла $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$. В то же время вычисление потока через векторный магнитный потенциал производится через циркуляцию вектора \mathbf{A} по контуру, ограничивающему данную поверхность

$$\Phi = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} dl. \quad (2.60)$$

2.2.2. Примеры расчета магнитных полей

Пример 2.10. Магнитное поле одиночного проводника. В отличие от примера 1.1 здесь рассмотрим, во-первых, круглый проводник конечного диаметра (рис. 2.21, а). Во-вторых, расчет распределения поля проведем на основе дифференциальной формы первого уравнения Максвелла: $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$. Выбирая цилиндрическую систему координат (рис. 2.21,а) и исходя из осевой симметрии для прямого бесконечно длинного проводника, принимаем: $\partial/\partial z = \partial/\partial \varphi = 0$. При этом от выражения для

оператора rot в цилиндрической системе координат остаются слагаемые

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{e}_r \cdot 0 - \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial H_z}{\partial r} + \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}.$$

Так как вектор плотности тока, протекающего по проводнику, имеет только z -составляющую ($\mathbf{j} = \mathbf{e}_r \cdot 0 + \mathbf{e}_\varphi \cdot 0 + \mathbf{e}_z \cdot j(r)$), то вектор напряженности магнитного поля будет иметь только азимутальную φ -составляющую ($\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \cdot 0 + \mathbf{e}_\varphi \cdot H(r) + \mathbf{e}_z \cdot 0$), а уравнение Максвелла для z -проекции примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d(rH)}{dr} = j(r). \quad (2.1)$$

Для области пространства вне проводника (при $r > R = d/2$), где ток отсутствует ($j = 0$),

$d(rH)/dr = 0$ и $rH = C_1$. Константа интегрирования может быть найдена из граничного условия, в качестве которого выступает значение магнитного поля на поверхности $H(R)$: $C_1 = RH(R)$. В итоге $H(r) = H(R)R/r$.

Нахождение поля внутри проводника требует знания распределения плотности тока по его поперечному сечению. Если считать проводник идеальным, то внутри магнитное поле отсутствует (см. разд. 1.5), а весь ток протекает по поверхности с линейной плотностью $j_s = i/2\pi R$. Значение магнитного поля на поверхности равно $H(R) = i/2\pi R$ (пример 1.9). В итоге получаем распределение поля вокруг проводника

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \cdot i/2\pi r. \quad (2.2)$$

В реальных проводниках вопрос о распределении плотности тока по поперечному сечению требует весьма детальных исследований. Для тонких проводов при постоянном токе можно приближенно считать, что ток распределен равномерно по сечению с плотностью $j = i/\pi R^2 = \text{const}$, и уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d(rH)}{dr} = i/\pi R^2. \quad (2.3)$$

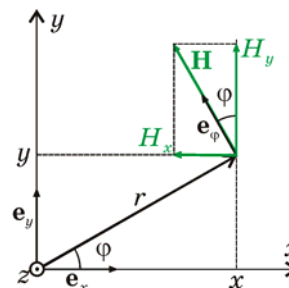
Простое интегрирование этого уравнения дает $rH = jr^2/2 + C_2$. Так как на оси провода ($r = 0$) $H \neq \infty$, то $C_2 = 0$. Отсюда внутри провода

$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{e}_\varphi \cdot ir/2\pi R^2, \quad (2.4)$$

то есть напряженность поля линейно возрастает при удалении от оси (рис. 2.21,б), принимая на поверхности провода такое же значение, как и снаружи $H(R) = i/2\pi R$.

Для дальнейшего использования представим полученное распределение в декартовых координатах. Из рис. 2.22 следуют простые соотношения для такого перехода:

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi, \quad \cos\varphi = x/r, \quad \sin\varphi = y/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Подставляя их в выражение (2.2), получим для вектора \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \frac{i}{2\pi} \frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x}{x^2 + y^2}. \quad (2.5)$$

Уравнение кривых $dx/H_x = dy/H_y$, описывающих силовые линии в координатах x и y (см. приложение), при подстановке проекций H_x и H_y из (2.5) приобретает вид $x dx + y dy = 0$. Его решение $x^2 + y^2 = C^2$ представляет собой уравнение концентрических окружностей, а константа интегрирования – их радиус.

Рис. 2.22. Переход от цилиндрических координат к декартовым

Пример 2.11. Магнитное поле двухпроводной линии. Рассмотрим два параллельных круглых проводника, по которым токи протекают в противоположных направлениях (рис. 2.23,а). Для расчета распределения магнитного поля, создаваемого токами, воспользуемся методом суперпозиции полей вокруг каждого провода, которые определяются на основе распределения в одиночном проводнике. Этот метод можно применять, если магнитное поле одного провода не влияет на распределение плотности тока в другом. Такое приближение допустимо, когда расстояние между проводами существенно превышает их диаметр ($d \gg a$).

Чтобы воспользоваться результатами предыдущего примера, необходимо в выражении (2.5) сместить начало отсчета по оси y на $\pm d$ и изменить знаки в соответствии с направлением протекания токов. В результате получим для верхнего провода

$$\mathbf{H}_1 = \frac{i}{2\pi} \frac{-\mathbf{e}_x(y-d) + \mathbf{e}_y x}{x^2 + (y-d)^2}, \quad (2.6)$$

а для нижнего

$$\mathbf{H}_2 = \frac{i}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_x(y+d) - \mathbf{e}_y x}{x^2 + (y+d)^2}. \quad (2.7)$$

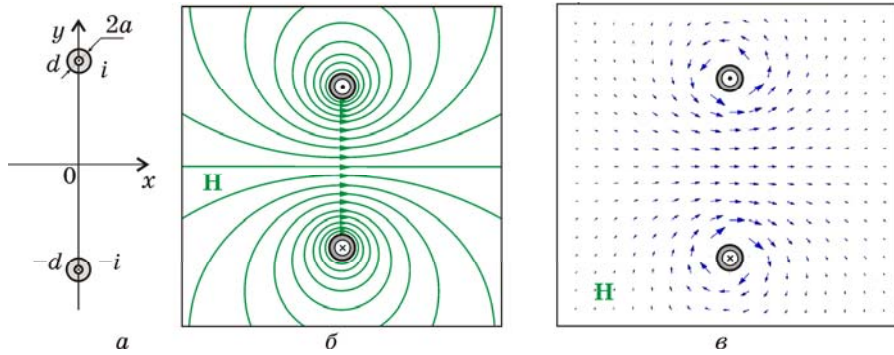


Рис. 2.23. Расположение координатных осей относительно проводов (а) и распределение напряженности магнитного поля в виде силовых линий (б) и в виде векторного поля (в)

Суммируя последние выражения, после простых преобразований получим

$$\mathbf{H} = \frac{i}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_x 2a(x^2 - y^2 + d^2) + \mathbf{e}_y 4dxy}{[x^2 + (y-d)^2][x^2 + (y+d)^2]}. \quad (2.8)$$

Для представления распределения поля в виде семейства силовых линий надо решить уравнение $dx/H_x = dy/H_y$, которое после подстановки выражений для проекций из (2.8) приобретает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 + d^2}. \quad (2.9)$$

Решение этого уравнения можно представить в форме

$$x^2 + (y \pm C)^2 = C^2 - d^2, \quad (2.10)$$

где C – постоянная интегрирования.

Данное выражение представляет собой уравнение семейства окружностей, имеющих радиус $\sqrt{C^2 - d^2}$, и центр которых смещен по оси y на $\pm C$. Разные знаки здесь соответствуют различным полуплоскостям $\mp y$. На рис. 2.23 изображено распределение магнитного поля с помощью семейства силовых линий (б) и в виде векторного поля (в), рассчитанного по выражению (2.8) для дискретного набора точек.

Для расчета погонной индуктивности необходимо связать поток вектора магнитной индукции, создаваемый в двухпроводной линии с величиной тока. В качестве поверхности S для расчета потока удобно выбрать плоскость длиной Δl , проходящую между проводами при $x = 0$ в пределах от $y = -d + a$ до $y = d - a$. В этом сечении магнитное поле имеет только x -составляющую, равную

$$\mathbf{H}_{(x=0)} = \frac{i}{\pi} \frac{\mathbf{e}_x d}{d^2 - y^2}. \quad (2.11)$$

Выбирая в качестве элемента поверхности интегрирования площадку $dS = \Delta l dy$, вычислим

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{\mu\mu_0 \Delta l i}{\pi} \int_{-d+a}^{d-a} \frac{dy}{y^2 - d^2} = \frac{\mu\mu_0 \Delta l i}{\pi} \ln \frac{2d-a}{a}. \quad (2.12)$$

Коэффициент перед i в правой части для единичной длины ($\Delta l = 1$) и равен погонной индуктивности двухпроводной линии

$$L_0 = \frac{\mu\mu_0}{\pi} \ln \frac{2d}{a}. \quad (2.13)$$

Здесь мы пренебрегли величиной a по сравнению с $2d$, так как данное распределение получено с использованием принципа суперпозиции, предполагающего отсутствие взаимного влияния магнитных полей на распределение плотности токов, что возможно только в тонких проводниках, если $d \gg a$.

Полученное решение можно распространить и на проводники конечного диаметра, если их контур совместить с силовой линией соответствующего диаметра, а расстояние увеличить в соответствии со смещением их центра.

Пример 2.12. Магнитное поле коаксиальной линии. Для коаксиальной двухпроводной линии (рис.2.4,а), к которой подключена нагрузка, ток протекает по проводам в противоположных направлениях. Распределение поля в пространстве между проводами находится так же и имеет такой же вид, как и для одиночного провода (пример 2.10):

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \cdot i/2\pi r. \quad (2.14)$$

За пределами внутренней области ($r > R_2$) магнитное поле можно рассчитать, предполагая, что ток равномерно распределен по сечению наружного провода с плотностью $j = -i/\pi(R_3^2 - R_2^2) = \text{const}$.

Решение уравнения (2.14) имеет вид $rH = jr^2/2 + C_3$, где константу интегрирования C_3 можно найти из условия $H(R_2) = i/2\pi R_2$:

$$C_3 = \frac{i}{2\pi} \left(1 + \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right).$$

В итоге распределение напряженности магнитного поля в наружном проводнике может быть описано выражением

$$\mathbf{H}(r) = \frac{i}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}. \quad (2.15)$$

Результирующее распределение магнитного поля представлено на рис. 2.24 в виде силовых линий (в) и в виде радиальной зависимости (б). На внутренней поверхности наружного проводника напряженность равна линейной плотности поверхностного тока $H(R_2) = i/2\pi R_2$ и убывает вглубь проводника. Если считать наружный проводник идеальным, то, как и в примере 2.10, в нем магнитное поле отсутствует. Одним из главных итогов этого решения является то, что *магнитное поле не выходит за пределы коаксиальной линии.*

Технически важным параметром коаксиальной линии является *погонная индуктивность*, т.е. индуктивность единичной длины. Для ее расчета необходимо вычислить поток вектора магнитной индукции через поверхность, в качестве которой выберем плоскость, совпадающую с радиальным сечением длиной Δl (рис. 2.25). Использование (2.14) приводит к результату

$$\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{\mu\mu_0 i \Delta l}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu\mu_0 i \Delta l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (2.16)$$

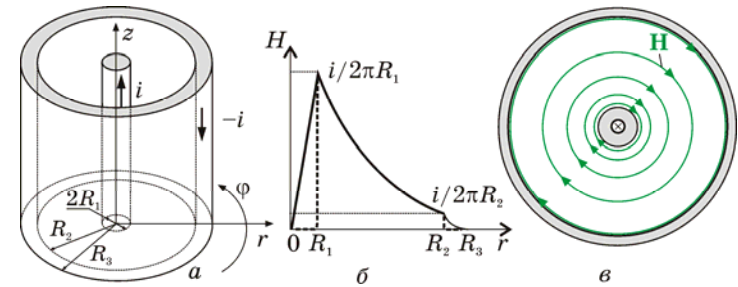
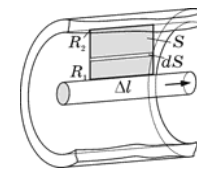


Рис. 2.24. Выбор координатной системы для коаксиальной линии (а), радиальное распределение напряженности магнитного поля (б) и распределение поля в виде силовых линий (в). Штриховая линия (б) – для идеального проводника

в котором коэффициент пропорциональности между током и потоком определяет величину индуктивности. Приняв $\Delta l = 1$, получим выражение для погонной индуктивности



$$L_0 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.17)$$

Рис. 2.25. Выбор поверхности интегрирования для расчета потока вектора электрической индукции

только один виток в виде линии тока i . Плотность намотки обычно характеризуют числом витков на единицу длины $n = N/2\pi R_r$, где R_r – радиус осевой линии тороида.

Для расчета распределения магнитного поля в таком соленоиде удобно воспользоваться первым уравнением Максвелла в интегральной форме

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (2.18)$$

Пример 2.13. Магнитное поле тороидального соленоида.

Тороидальный соленоид представляет собой проволочную катушку, намотанную на поверхность тороида. Из N витков катушки на рис. 2.26 показан

Обратим внимание, что интеграл в правой части представляет собой весь ток i_S , который пронизывает поверхность S , ограниченную контуром интегрирования l . Ввиду очевидной осевой симметрии данной конструкции в качестве контура интегрирования удобно выбрать окружность произвольного радиуса r с центром на оси z (рис. 2.26). Очевидно, что в том

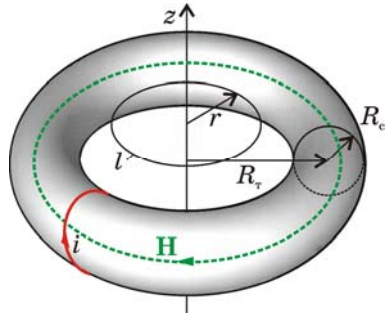


Рис. 2.26. Выбор координатной системы и контура интегрирования для расчета магнитного поля в тороидальном соленоиде

случае, когда контур интегрирования проходит вне объема соленоида, линии тока либо не пересекают поверхность S , либо пересекают ее два раза в обратных направлениях. Так как суммарный ток при этом будет нулевым, то можно сделать вывод, что *магнитное поле вне соленоида будет отсутствовать*. И только в том случае, когда окружность l проходит внутри объема соленоида, каждая линия тока пересекает поверхность интегрирования один раз, обеспечивая суммарный ток $i_S = Ni$. Интеграл в левой части, как и в примере 1.1, равен произведению магнитного поля H на длину окружности интегрирования $2\pi r$.

В результате получим

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{Ni}{2\pi r} = ni \frac{R_t}{r}. \quad (2.19)$$

Магнитное поле внутри тороидального соленоида уменьшается при удалении от оси, но если радиус тороида R_t заметно превышает радиус катушки соленоида R_c , то это уменьшение незначительно. Существенная особенность такого соленоида состоит в том, что магнитное поле сосредоточено только внутри соленоида, а поля рассеяния отсутствуют.