

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ

Понятия электрического и магнитного поля вводят для характеристики сил взаимодействия между зарядами. Различают два вида электрических сил, которые действуют на любой заряд q со стороны других зарядов и пропорциональные данному заряду: $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. Первая из них, называемая силой Кулона, пропорциональна напряженности электрического поля \mathbf{E} , вторая – сила Лоренца, действует только на движущийся заряд и пропорциональна векторному произведению скорости его движения \mathbf{v} на индукцию магнитного поля \mathbf{B} . Из этого соотношения и определяют обычно \mathbf{E} как силу Кулона, которая действует на единичный заряд независимо от его скорости, а магнитную индукцию \mathbf{B} как силу Лоренца, которая действует также на единичный заряд, движущийся с единичной скоростью. В общем случае векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} – функции четырех переменных: трех пространственных координат и времени, то есть для характеристики силового действия на заряд надо знать шесть скалярных функций координат \mathbf{r} и времени t .

Для полной характеристики электромагнитного поля в произвольной среде указанной пары векторных функций $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ недостаточно. Необходимо еще две: $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ – вектор напряженности магнитного поля и $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ – вектор электрической индукции, которые связаны с предыдущей парой соотношениями:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (1.1)$$

Здесь ε и μ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ (Ф/м) – диэлектрическая постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (Гн/м) – магнитная постоянная, причем $1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = c = 3 \cdot 10^8$ (м/с), где c – скорость света в вакууме, а их отношение определяет так называемое волновое сопротивление вакуума $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi \approx 377$ (Ом). Необходимо также указать, что соотношения (1.1) характеризуют изотропные среды. Для анизотропных диэлектрическая и магнитная проницаемости могут быть разными для разных направлений. В этом случае для характеристики среды используют так называемые тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости, которые включают как минимум тройки параметров $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ и μ_x, μ_y, μ_z , являющихся коэффициентами пропорциональности в скалярных соотношениях (1.1), а соответственно векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} , \mathbf{D} и \mathbf{E} не будут совпадать между собой по направлению.

Для графического наглядного изображения электрического и магнитного полей используют силовые линии (рис. 1,а), касательные к которым указывают направление соответствующего вектора, а их плотность пропорциональна его величине. Не менее нагляден способ, изображенный на рис. 1,б, который более информативен из-за того, что в дискретных узловых точках можно определить не только направление векторов поля, но в определенном масштабе и их величину.

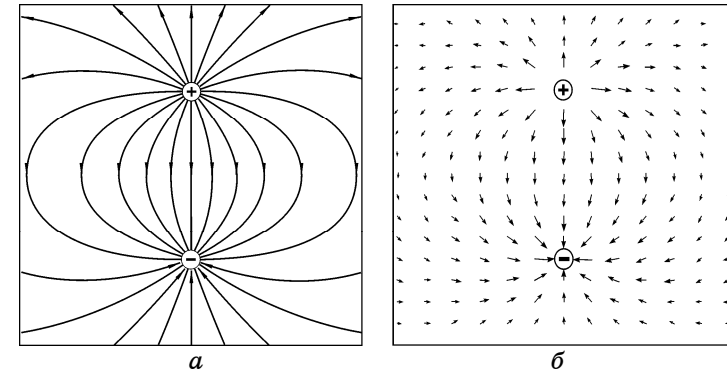


Рис. 1.1. Способы изображения векторных полей с помощью силовых линий (а) и векторов для дискретного массива точек (б)

Электрическим и магнитным полям свойственен принцип суперпозиции. Этот довольно мощный принцип, который присущ полевой форме материи в отличие от вещественной, позволяет независимо рассчитывать поля, создаваемые разными источниками, с последующим суммированием результатов.

1.1. Уравнения Максвелла

Фундаментальной основой уравнений, описывающих электромагнитные поля, являются уравнения Максвелла:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{j}, \quad (1.2, a)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (1.2, б)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.2, в)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.2, г)$$

где \mathbf{j} – плотность тока проводимости (А/м²), $\mathbf{j} = \mathbf{e}_s \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta i / \Delta S)$, Δi –

ток, который протекает через площадку ΔS , перпендикулярную к линиям тока; \mathbf{e}_s – единичный вектор нормали к ΔS ;

$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta q / \Delta V)$ – объемная плотность заряда (Кл/м³), где Δq – заряд, который находится в объеме ΔV . Величины ρ и \mathbf{j} – макроскопические, не учитывающие дискретность заряда и линий тока. Именно поэтому теория поля, основанная на этих уравнениях, является *макроскопической*. Вектор плотности тока зависит от проводимости среды и пропорционален напряженности электрического поля

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.3)$$

Здесь коэффициент пропорциональности σ (См/м) – удельная электрическая проводимость среды, которая для анизотропных сред является тензорной величиной, включающей компоненты $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

Уравнения (1.1) и (1.3) называют иногда *материальными уравнениями*, так как они устанавливают связь между некоторыми векторами, которые входят в уравнения Максвелла, через параметры ϵ, μ и σ , характеризующие среду.

Уравнения (1.2) – это система *дифференциальных уравнений* в частных производных, которая может быть разрешена лишь при задании дополнительных условий, которые определяют способ возбуждения полей или задают поля на границах рассматриваемой области.

Иногда удобнее пользоваться уравнениями Максвелла, записанными в форме интегральных соотношений. Для такого представления все члены первого и второго уравнений (1.2) скалярно помножим на вектор $d\mathbf{S}$ и проинтегрируем по поверхности S , ограниченной замкнутым контуром l . Используя затем теорему Стокса (см. приложение) для замены интеграла по поверхности интегралом по замкнутому контуру (циркуляцией), получим

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} &= d(\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}) / dt + \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \\ \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -d(\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}) / dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В правой части этих уравнений изменена последовательность дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности. Кроме того, поскольку определенный интеграл по поверхности S не зависит от координат, частная производная по времени заменена на обычную.

Если затем третье и четвертое уравнения из (1.2) помножить на dV и проинтегрировать по объему V , ограниченному замкнутой

поверхностью S , то, пользуясь теоремой Остроградского-Гаусса (см. приложение) для замены интеграла по объему интегралом по замкнутой поверхности (поток), получим

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= \int_V \rho dV, \\ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Пары уравнений (1.4) и (1.5) представляют собой уравнения Максвелла *в интегральной форме*.

Не имеет смысла говорить про “вывод” уравнений Максвелла из каких-либо более общих закономерностей, так как именно эти уравнения представляют собой наиболее фундаментальную систему уравнений, которую имеет классическая физика для описания электромагнитных полей. Эта система была сформулирована Максвеллом как обобщение уже известных законов электромагнетизма. Проиллюстрируем это несколькими простыми примерами.

Пример 1.1. Рассмотрим прямой проводник, по которому протекает постоянный ($\partial/\partial t = 0$) ток (рис. 1.2). Вокруг проводника возникает магнитное поле, которое просто может быть рассчитано из первого уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Для интегрирования удобно выбрать поверхность S , ограниченную контуром l в виде окружности с радиусом r и центром на оси проводника и расположенную в плоскости, перпендикулярной к оси проводника. Используя очевидный факт осевой симметрии задачи, заменим скалярное произведение векторов произведением их длин и вынесем H за знак интеграла как величину, постоянную вдоль контура интегрирования. Тогда $\oint_l dl = 2\pi r$, а интеграл в правой части будет равняться полному току i , пересекающему поверхность S , поэтому $H = i/2\pi r$. Данное соотношение является выражением известного закона для нахождения магнитного поля для проводника со током.

Пример 1.2. В пространстве, где имеется магнитное поле, рассмотрим некоторый проволочный контур l (рис. 1.3). Согласно второму уравнению Максвелла в интегральной форме

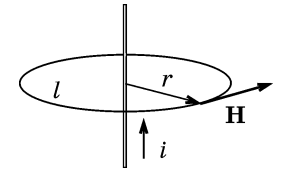


Рис. 1.2. Модель для расчета магнитного поля с осевой симметрией вокруг проводника с током

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -d(\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}) / dt$$

под действием переменного во времени магнитного поля в пространстве возникает такое электрическое поле, что его циркуляция равна скорости изменения интеграла в правой части, который является потоком Φ вектора магнитной индукции через поверхность (и не зависит от ее формы), ограниченную контуром. Для выбранного контура интеграл в левой части – это электродвижущая сила (ЭДС), возникающей в контуре, причем $\text{ЭДС} = -d\Phi/dt$, что выражает закон электромагнитной индукции, установленный Фарадеем.

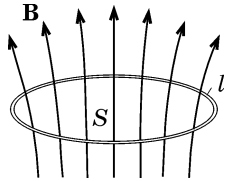


Рис. 1.3. К расчету ЭДС под действием переменного магнитного поля

Пример 1.3. Рассмотрим точечный заряд q , вокруг которого существует электрическое поле, причем в соответствии с третьим уравнением Максвелла в интегральной форме

$$\epsilon\epsilon_0 \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV.$$

Это уравнение, которое иногда называют теоремой Гаусса, показывает, что поток вектора напряженности электрического поля, умноженный на $\epsilon\epsilon_0$, через замкнутую поверхность, равняется полному заряду, содержащемуся в объеме, ограниченном этой поверхностью. Если в качестве поверхности интегрирования выбрать сферу (рис. 1.4) с центром в месте расположения заряда, то очевидно, что из-за центральной симметрии векторы \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$ коллинеарны и напряженность постоянна на всей поверхности интегрирования. Поэтому интеграл в левой части равен произведению E на поверхность сферы $4\pi r^2$, а интеграл в правой части – заряду q , и значит $E = q/4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2$. Если в электрическое

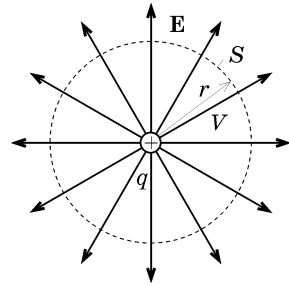


Рис. 1.4. Сферически симметричное поле точечного заряда

поле заряда q внести пробный заряд q' , то действующая на него сила $F = qE = qq'/4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2$. Данное выражение представляет собой запись закона Кулона о взаимодействии между зарядами.

Пример 1.4. Четвертое уравнение Максвелла $\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ показывает, что поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равняется нулю, то есть входной поток равняется выходному (рис. 1.5). Это означает, что магнитные силовые линии всегда замкнуты и не имеют ни начала, ни конца, как это может быть с электрическим полем, силовые линии которого обычно начинаются или заканчиваются на зарядах.

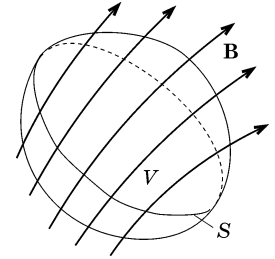


Рис. 1.5. Поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность

1.2. Ток смещения

В рассмотренных элементарных примерах без внимания осталось первое слагаемое в правой части первого уравнения Максвелла. Для того, чтобы понять его смысл, проанализируем еще одну ситуацию.

Пример 1.5. Рассмотрим две пластины конденсатора (рис. 1.6), в цепи которого протекает ток i . Выберем контур интегрирования l в виде замкнутой линии, охватывающей проводник. Если поверхность S_1 , ограниченная этим контуром, пересекает проводник, то

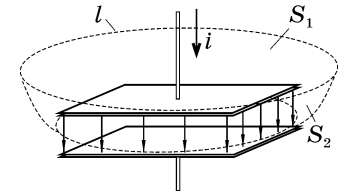


Рис.1.6. Разные поверхности интегрирования опираются на один и тот же контур

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{S} = i.$$

Если выберем другую поверхность S_2 , ограниченную этим же контуром, но которая проходит между пластинами конденсатора, то

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = d(\int_{S_2} \mathbf{D} d\mathbf{S}) / dt.$$

Однако результат не должен зависеть от выбора поверхности интегрирования, поэтому правые части последних выражений должны быть равны. Для этого и вводят понятие *тока смещения*,

которое представляется несколько непривычным, так как оно не связано с перемещением зарядов между пластинами, а только с изменением зарядов, которые накапливаются на пластинах и вызывают изменение напряженности электрического поля. В таком случае ток проводимости в цепи конденсатора замыкается током смещения между его пластинами:

$$i_{\text{см}} = d(\int_S \mathbf{D}d\mathbf{S}) / dt. \quad (1.6)$$

Плотность тока смещения

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (1.7)$$

Ток смещения возможен только при наличии нестационарных процессов в электрических полях, которые изменяются во времени. Понятие тока смещения впервые было введено Максвеллом и стало довольно важным шагом в понимании свойств электромагнитного поля. Целесообразность такого понятия становится понятной при рассмотрении уравнения непрерывности.

1.3. Уравнение непрерывности

Из уравнений Максвелла вытекает еще одно важное соотношение. Для того, чтобы его получить, подействуем оператором div на все члены первого уравнения в (1.2). Так как $\text{div}(\text{rot } \mathbf{H})$ тождественно равняется нулю, то

$$\text{div}(\partial \mathbf{D} / \partial t) + \text{div} \mathbf{j} = 0.$$

Изменяя порядок дифференцирования по времени и по пространственным координатам и учитывая, что $\text{div} \mathbf{D} = \rho$, получаем

$$\partial \rho / \partial t + \text{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.8)$$

Это выражение показывает, что изменение плотности пространственного заряда в данной точке возможно лишь за счет расхождения (дивергенции) тока, и называется *уравнением непрерывности*, или *законом сохранения заряда*. Последнее название становится особенно понятным, если записать уравнение непрерывности в интегральной форме. Для этого помножим оба его слагаемых на dV и проинтегрируем по некоторому объему V ,

ограниченному замкнутой поверхностью S . Используя затем теорему Остроградского-Гаусса, получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) + \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.9)$$

Смысл полученного выражения состоит в том, что скорость изменения заряда внутри замкнутой поверхности S равняется потоку вектора \mathbf{j} , то есть полному току через эту поверхность.

Более наглядным становится уравнения непрерывности, если его записать в несколько иной форме. Подставляя в (1.8) $\text{div} \mathbf{D}$ вместо ρ , изменяя порядок дифференцирования и учитывая выражение (1.7) для тока смещения, получим

$$\text{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}) = 0. \quad (1.8, a)$$

Такая форма записи уравнения непрерывности означает, что подобно силовым линиям магнитного поля (см. пример 1.4) линии *полного* (проводимости + смещения) тока являются непрерывными и замкнутыми.

Рассмотрим еще два частных случая, которые иллюстрируют смысл уравнения непрерывности и имеют важное значение в электронной технике.

Пример 1.6. Если в однородной среде, которая характеризуется удельной электропроводностью σ , каким-либо образом создать объемный заряд, то очевидно, что за счет токов проводимости этот заряд будет „расплываться” до тех пор, пока не распределится равномерно по всему объему, то есть до исчезновения создаваемого им электрического поля. Это явление называется *релаксацией*, то есть возвращением к состоянию равновесия. Проведем количественный анализ процесса релаксации объемного заряда с помощью уравнения непрерывности, для чего вместо плотности тока подставим его значение из (1.3), а вместо $\text{div} \mathbf{E}$ – величину ρ / ϵ_0 из (1.1) (постоянные величины ϵ_0 и σ можно вынести за знак дивергенции). В результате получаем дифференциальное уравнение $\partial \rho / \partial t + \sigma \rho / \epsilon_0 = 0$, решением которого будет экспоненциальная функция (рис. 1.7):

$$\rho(t) = \rho(0) \exp(-t / \tau_m).$$

Величина $\tau_m \equiv \epsilon_0 / \sigma$ характеризует скорость уменьшения объемного заряда и называется *максвелловым временем релаксации*. Нужно иметь в виду, что за время $\Delta t = \tau_m$ объемный

заряд уменьшается в $e \approx 2,7$ раз. Приблизительно считается, что объемный заряд полностью исчезает за время, равное $(3...5)\tau_m$. В металлах с высокой проводимостью это время очень мало, порядка $10^{-17}...10^{-18}$ с. В диэлектриках в зависимости от их проводимости оно равно $10^{-2}...10^{-6}$ с. Описанное явление наблюдается, например, в такой простой ситуации, как разряд конденсатора за счет токов проводимости, которые протекают через изолирующий диэлектрик. Время разряда определяется параметрами диэлектрика – диэлектрической проницаемостью и удельной проводимостью среды.

Пример 1.7. Рассмотрим узел электрической цепи (рис. 1.8), в котором сходятся несколько проводников с протекающими постоянными токами i_1, \dots, i_n . Окружим данный узел некоторой замкнутой поверхностью S и воспользуемся уравнением непрерывности (1.9). Поскольку при *постоянных* токах заряд внутри поверхности не накапливается и не исчезает, первое слагаемое равно нулю. Второе слагаемое равняется полному току, который протекает через поверхность S , поэтому

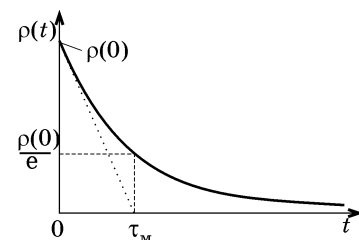


Рис.1.7. Экспоненциальный спад пространственной плотности заряда в проводящей среде

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (1.10)$$

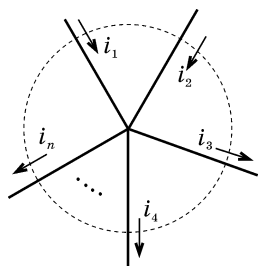


Рис.1.8. Сумма постоянных токов через узел равняется нулю

Это соотношение представляет собой первый закон Кирхгофа и является одним из основных в теории электронных цепей.

Надо помнить, что этот закон, строго говоря, справедлив только для постоянных токов. Использование его для переменного тока является приближенным и возможно при некоторых условиях, о которых речь будет дальше.

1.4. Баланс электромагнитной энергии

Для выяснения вопроса о видах электромагнитной энергии и ее видоизменениях сделаем вначале некоторые формальные преобразования. Умножив скалярно первое из уравнений

Максвелла (1.2) на \mathbf{E} , а второе на \mathbf{H} , отнимем от второго первое и перенесем все члены уравнения в левую часть:

$$\text{HrotE} - \text{ErotH} + \mathbf{H}(\partial\mathbf{B}/\partial t) + \mathbf{E}(\partial\mathbf{D}/\partial t) + \mathbf{jE} = 0.$$

Первые два слагаемых можно заменить (см. приложение) дивергенцией векторного произведения \mathbf{E} на \mathbf{H} . Третье и четвертое, внося первый сомножитель под знак производной и учитывая (1.1), представим в виде (скалярное произведение вектора самого на себя равняется квадрату его длины): $\partial(\mu\mu_0 H^{2/2})/\partial t$ и $\partial(\epsilon\epsilon_0 E^{2/2})/\partial t$. Тогда

$$\text{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + \partial(\mu\mu_0 H^2/2 + \epsilon\epsilon_0 E^2/2)/\partial t + \mathbf{jE} = 0. \quad (1.11)$$

Данное выражение – уравнение баланса электромагнитной энергии в дифференциальной форме. В нем векторное произведение $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \equiv \mathbf{\Pi}$ называется *вектором Пойнтинга* и имеет размерность $\text{В}\cdot\text{А}/\text{м}^2 = \text{Дж}/(\text{с}\cdot\text{м}^2) = \text{Вт}/\text{м}^2$. Физический смысл вектора Пойнтинга – это электромагнитная энергия, которая проходит сквозь единичную площадку за единицу времени и называется плотностью потока мощности. Слагаемые под знаком производной по времени измеряются в джоулях на кубический метр ($\text{Дж}/\text{м}^3$), их физическое содержание – энергия в единице объема или плотности энергии соответственно магнитного и электрического полей.

Последнее слагаемое измеряется также в ваттах на кубический метр ($\text{Вт}/\text{м}^3$) и характеризует потери электромагнитной энергии на нагревание. Величина $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}^2$ равняется количеству джоулевого тепла, которое выделяется в единице объема за единицу времени.

Баланс электромагнитной энергии становится более наглядным, если записать (1.11) в интегральной форме. Для этого все члены (1.11) умножим на dV и проинтегрируем по некоторому объему V , ограниченному замкнутой поверхностью S . Воспользовавшись теоремой Остроградского-Гаусса, перейдем для первого слагаемого к интегрированию по поверхности и получим

$$\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \left[\int_V \left(\frac{\mu\mu_0 H^2}{2} + \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} \right) dV \right] + \int_V \mathbf{jE} dV = 0. \quad (1.12)$$

Можно привести множество различных примеров, в которых преобразования энергии описываются данным уравнением баланса. Например, в замкнутом объеме (поток энергии через его стенки отсутствует) электромагнитная энергия может только уменьшаться

($\partial/\partial t < 0$) за счет потерь на нагревание (третье слагаемое). Если электромагнитная энергия остается постоянной ($\partial/\partial t = 0$), это означает, что внутри данного объема через поверхность существует поток энергии, который покрывает потери на нагревание.

При рассмотрении подобных примеров может возникнуть вопрос, откуда берется электромагнитная энергия, на который тяжело дать ответ без довольно глубокого рассмотрения различных процессов преобразования энергии. Но для формального представления об источниках энергии в уравнении баланса их можно смоделировать с помощью так называемых *сторонних источников* тока или напряжения. В первом случае в третьем слагаемом под \mathbf{j} надо понимать сумму плотности тока проводимости и плотности стороннего тока ($\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ст}}$). Аналогично можно заменить \mathbf{E} суммой ($\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}$), если удобнее представлять источник энергии как источник напряжения. Таким образом, физическое содержание последнего слагаемого расширяется: он характеризует все виды превращения энергии – не только преобразование электромагнитной энергии в тепловую, но и преобразование других видов энергии в электромагнитную.

1.5. Граничные условия

Обычно граничные условия записывают в виде четырех соотношений – по два для нормальных и касательных составляющих электрического и магнитного полей.

Рассмотрим вначале вывод этого условия для касательных составляющих электрического поля из третьего уравнения Максвелла $\oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = \int_V \rho dV$.

В качестве объема интегрирования возьмем цилиндр (рис. 1.9), с высотой Δh и площадью оснований ΔS , лежащих по обе стороны от границы раздела сред. И Δh и ΔS должны быть настолько малыми, чтобы в пределах этого объема поля можно было считать неизменными. Интеграл в левой части представим как сумму трех интегралов: по верхней и нижней торцевым поверхностям и по боковой поверхности цилиндра. Учитывая взаимное расположение векторов $d\mathbf{S}$ и орта нормали \mathbf{e}_n к границе раздела, можно записать

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\Delta S + \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D}d\mathbf{S} = \Delta q, \quad (1.13a)$$

или

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) + \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D}d\mathbf{S} / \Delta S = \Delta q / \Delta S. \quad (1.13b)$$

Здесь Δq – весь заряд, сосредоточенный внутри выбранного объема. Если затем уменьшать высоту цилиндра ($\Delta h \rightarrow 0$), приближая его верхний и нижний торец к границе раздела, то очевидно, что поток вектора \mathbf{D} через боковую поверхность также будет стремиться к 0, как и заряд в правой части, если плотность заряда в рассматриваемом объеме имеет конечные значения. В этом случае

$$D_{1n} - D_{2n} = 0. \quad (1.14)$$

где D_{1n} и D_{2n} – проекции векторов \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 на нормаль к границе раздела.

Однако, встречаются ситуации, когда заряд сосредоточен в очень тонком (микроскопически – в бесконечно тонком) слое у границы раздела и можно ввести понятие поверхностного заряда с *поверхностной плотностью*

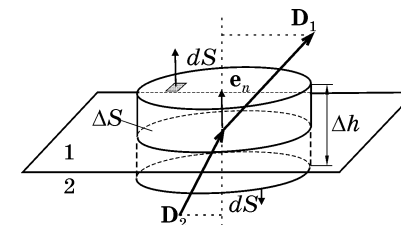


Рис. 1.9. Выбор объема интегрирования при выводе граничных условий для нормальных составляющих

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta q / \Delta S, \quad (\text{Кл/м}^2). \quad (1.15)$$

Тогда при стягивании торцов цилиндра к границе раздела ($\Delta h \rightarrow 0$) правая часть (1.13a) будет стремиться к фиксированной величине, равной $\rho_s \Delta S$, и равенство (1.13b) примет вид

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \quad (1.16)$$

или в скалярной форме

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s. \quad (1.17)$$

Последние соотношения и представляют собой одно из граничных условий для электрического поля и означают, что на границе раздела нормальная составляющая вектора электрической индукции имеет разрыв, равный поверхностной плотности заряда. Если же на границе нет заряда, то нормальная составляющая непрерывна и $D_{1n} = D_{2n}$, или для векторов напряженности поля $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$.

Следует отметить, что представление о бесконечно тонком слое поверхностного заряда является идеализацией, приемлемой лишь с макроскопической точки зрения. В дальнейшем будут рассмотрены более точные модели, дающие представление о реальных

распределениях заряда в приповерхностных слоях (см. *пример 2.7*).

Обратившись к четвертому уравнению Максвелла в интегральной форме $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$, которое по структуре отличается от третьего только нулевой правой частью, можно подобным образом получить, что на границе раздела двух сред

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad (1.18)$$

то есть проекции векторов магнитной индукции на нормаль к границе непрерывны $B_{1n} = B_{2n}$, а проекции векторов напряженности магнитного поля могут отличаться из-за разных магнитных проницаемостей сред: $\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$.

Для получения соотношений между касательными составляющими векторов поля на границе раздела двух сред (горизонтальная плоскость на рис. 1.10) проведем произвольную плоскость через орт нормали \mathbf{e}_n к ней, которая будет

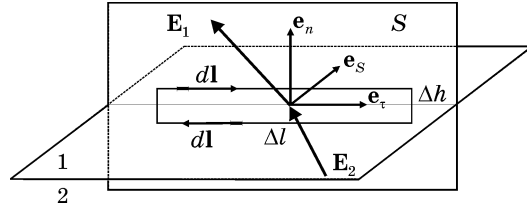


Рис. 1.10. Выбор контура интегрирования при выводе граничных условий для касательных составляющих

перпендикулярной к плоскости раздела и поэтому направление орта \mathbf{e}_τ вдоль линии пересечения никак не связано с ориентацией векторов поля. В этой плоскости выберем контур интегрирования в виде прямоугольника, лежащего по обе стороны от границы раздела, со сторонами Δl и Δh настолько малыми, чтобы в пределах площадки $\Delta S = \Delta l \Delta h$ поля можно считать неизменными.

Проводя интегрирование второго уравнения Максвелла в интегральной форме $\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -d(\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S})/dt$ по этому контуру,

представим циркуляцию вектора \mathbf{E} в левой части как сумму интегралов по верхней, нижней и боковым сторонам прямоугольника. Учитывая постоянство векторов поля вдоль контура, а также взаимную ориентацию орта \mathbf{e}_τ и векторов $d\mathbf{l}$, можно записать

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\Delta l + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\mathbf{e}_s(d\mathbf{B}/dt)\Delta h\Delta l, \quad (1.19a)$$

или

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{E} d\mathbf{l} / \Delta l = -\mathbf{e}_s(d\mathbf{B}/dt)\Delta h, \quad (1.19b)$$

Стягивая верхнюю и нижнюю стороны контура к границе раздела ($\Delta h \rightarrow 0$), получим, что и третье слагаемое и правая часть в последнем равенстве становятся пренебрежимо малыми, и оно приобретает вид

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0. \quad (1.20)$$

Так как направление орта \mathbf{e}_τ на границе раздела было выбрано произвольно, то проекция *разностного* вектора напряженности электрического поля на *любое* направление равна 0. В частности, это значит, что проекции векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 на плоскость раздела сред одинаковы:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (1.21)$$

а разностный вектор может иметь только нормальную составляющую, которая в соответствии с (1.17) может быть только при наличии поверхностного заряда. Поэтому

$$[(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{e}_n] = 0. \quad (1.22)$$

Последние три соотношения могут считаться равноценными и представляют собой граничное условие для касательной составляющей вектора напряженности электрического поля.

Граничное условие для касательных составляющих магнитного поля можно получить методически так же, как и предыдущее, но воспользовавшись первым уравнением Максвелла в интегральной форме $\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = d(\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S})/dt + \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}$. Интегрируя его по контуру, такому же, как и на рис. 1.10, получим соотношение

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\Delta l + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \mathbf{e}_s(d\mathbf{D}/dt)\Delta h\Delta l + \mathbf{e}_s \mathbf{j} \Delta h\Delta l, \quad (1.23a)$$

или

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{H} d\mathbf{l} / \Delta l = \mathbf{e}_s(d\mathbf{D}/dt)\Delta h + \mathbf{e}_s \mathbf{j} \Delta h, \quad (1.23b)$$

которые отличается от (1.19) заменой \mathbf{E} на \mathbf{H} , \mathbf{B} на $-\mathbf{D}$ и тем, что в правой части имеется второе слагаемое, представляющее ток проводимости Δi , протекающий через площадку $\Delta S = \Delta h\Delta l$.

При стягивании контура к линии Δl на границе раздела оба слагаемых правой части из-за конечных значений векторов \mathbf{D} и \mathbf{j} становятся пренебрежимо малыми и

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0, \quad (1.24)$$

то есть касательные составляющие вектора напряженности магнитного поля по обе стороны от границы раздела одинаковы.

Однако, исключение составляет идеализированная ситуация, когда весь ток проводимости протекает в бесконечно тонком слое у границы раздела. Для такого *поверхностного тока* удобно ввести понятие *линейной плотности*

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{e}_j \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \Delta i / \Delta l, \quad (\text{А/м}), \quad (1.25)$$

где орт \mathbf{e}_j совпадает с направлением линий тока, а Δi – величина тока, проходящего по поверхности и пересекающего отрезок Δl , перпендикулярный линиям тока (рис. 1.11).

В этом случае при стягивании контура интегрирования к границе раздела второе слагаемое в правой части (1.23а) остается неизменным, так как весь ток через площадку ΔS будет равным

$$\Delta i = \int_{\Delta S} \mathbf{j} d\mathbf{S} = \mathbf{e}_s \mathbf{j}_s \Delta l \quad (1.26)$$

и не зависящим от размера Δh , а выражение (1.23б) принимает вид

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{e}_s \mathbf{j}_s. \quad (1.27)$$

Если плоскость S на рис. 1.10 выбрать перпендикулярной линиям тока, так чтобы орт \mathbf{e}_s совпадал с \mathbf{e}_j , то (1.27) примет более простую форму записи

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_s. \quad (1.28а)$$

или

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_s. \quad (1.28б)$$

Эти соотношения означают, что при протекании по границе раздела поверхностного тока касательные составляющие векторов напряженности магнитного поля различаются на величину, равную линейной плотности тока. По направлению эта разность перпендикулярна линиям тока (рис. 1.11).

В итоге соотношения (1.17), (1.21) для электрического поля и (1.18), (1.28) для магнитного представляют собой граничные

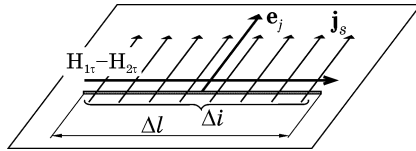


Рис. 1.11. Поверхностный ток вызывает разрыв напряженности магнитного поля

условия, записанные для нормальных и касательных составляющих. Их можно представить и в векторной форме. Если считать, что поле в первой среде известно, то вектор напряженности электрического поля во второй среде

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_\tau E_{1\tau} + \mathbf{e}_n(\varepsilon_1 E_{1n} / \varepsilon_2 - \rho_s / \varepsilon_2 \varepsilon_0). \quad (1.29)$$

Это соотношение показывает, что касательная составляющая напряженности остается такой же, как и в первой среде. Нормальная же составляющая изменяется, во-первых, за счет изменения диэлектрической проницаемости вещества и, во-вторых, за счет поля поверхностного заряда, если таковой имеется у границы раздела. Он изменяет нормальную составляющую вектора электрической индукции в соответствии с (1.17) на величину ρ_s . Надо отметить, что в (1.20) направление орта \mathbf{e}_τ на границе в принципе может быть любым, но в (1.29) он должен располагаться вдоль проекции \mathbf{E}_1 на границу раздела.

Для магнитного поля соотношения (1.18) и (1.27) между векторами \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 на границе раздела можно представить в векторной форме

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{e}_\tau H_{1\tau} + \mathbf{e}_n \mu_1 H_{1n} / \mu_2 + [\mathbf{e}_n \times \mathbf{j}_s]. \quad (1.30)$$

Отсюда видно, что нормальная составляющая напряженности магнитного поля изменяется соответственно изменению магнитной проницаемости сред. Касательная составляющая остается неизменной, если на границе нет поверхностных токов. В противном случае вектора \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 различаются на величину, соответствующую напряженности магнитного поля, создаваемого поверхностными токами. Величина этого разрыва равна линейной плотности тока, а направление определяется ортом векторного произведения $[\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_n]$.

Используя приведенные граничные условия, рассмотрим две простые модели, описывающие поля возле поверхности идеального проводника и имеющие большое значение для понимания дальнейшего материала.

Пример 1.8. Каковы особенности электрического поля возле поверхности идеального металла? Для ответа на этот вопрос надо исходить из того, что если электрическая проводимость металла равна бесконечности, то внутри него электрическое поле должно отсутствовать. Но тогда из граничных условий (1.17) и (1.21) сразу вытекает, что касательная составляющая поля над поверхностью равна нулю и вектор напряженности электрического поля будет перпендикулярным к поверхности (рис. 1.12) и пропорциональным

поверхностной плотности заряда: $E_1 = E_n = \rho/\epsilon\epsilon_0$. Этот вывод упрощенно часто распространяют и на обычные металлы.

Пример 1.9. Каковы особенности высокочастотного магнитного поля у поверхности идеального металла? Как и в предыдущем примере, основой для ответа является тот факт, что высокочастотное поле внутри металла не проникает, то есть магнитная составляющая равна нулю даже в немагнитных металлах. Это означает, что нормальная составляющая вектора также равна нулю, поэтому магнитное поле будет касательным к поверхности и перпендикулярным к линиям тока, а его напряженность будет равна поверхностной плотности тока (рис. 1.13):

$$H_1 = H_\tau = j_s.$$

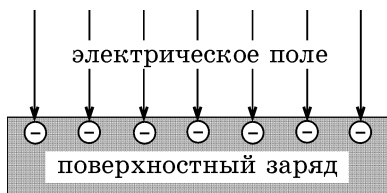


Рис.1.12. Электрическое поле на поверхности идеального металла создается поверхностным зарядом и перпендикулярно к ней.

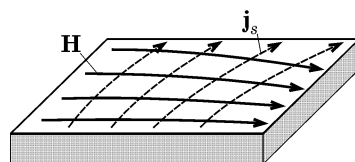


Рис.1.13. Ток на поверхности идеального металла создает касательное к ней магнитное поле и перпендикулярно к ней.

Рассмотрим еще один пример, который показывает, как можно использовать граничные условия у границы раздела двух сред.

Пример 1.10. Пусть надо рассчитать направление и величину электрического поля в слюде ($\epsilon = 7$, $\sigma = 10^{-17}$ См/м), если возле ее поверхности в воздухе напряженность поля равна 10^3 В/м, а силовые линии направлены под углом 45° к поверхности.

Значение удельной электрической проводимости показывает, что слюда – хороший диэлектрик, поэтому внешнее поле не вызывает на ее поверхности наведенного заряда ($\rho_s = 0$). Используя обозначения на рис. 1.14, запишем граничные условия для нормальной ($\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$) и касательной ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$) составляющих электрического поля по обе стороны от границы. Поскольку $E_{1n} = E_1 \cos \alpha_1 \approx 707$ В/м, то $E_{2n} = E_{1n}/\epsilon_2 \approx 101$ В/м, а $E_{2\tau} = E_{1\tau} = E_1 \sin \alpha_1 \approx 707$ В/м. Отсюда получим $E_2 = \sqrt{E_{2n}^2 + E_{2\tau}^2} = 714$ В/м; $\alpha_2 = \arctg(E_{2\tau}/E_{2n}) = 82^\circ$. Заметим, что с увеличением диэлектрической проницаемости угол наклона вектора напряженности поля возрастает.

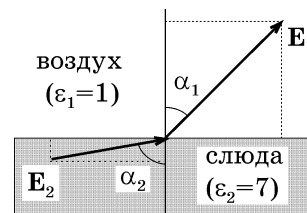


Рис.1.14. Изменение направления и длины вектора электрического поля на границе диэлектрических сред

Последний факт используют для формулирования *приближенных* граничных условий при моделировании электрических полей в полупроводниковых приборах. Наиболее употребительные полупроводниковые материалы имеют диэлектрическую проницаемость, значительно превышающую 1 ($\epsilon_{Ge} = 16$, $\epsilon_{Si} = 12$, $\epsilon_{GaAs} = 13$). Из-за того, что нормальная составляющая напряженности в полупроводнике обратно пропорциональна его диэлектрической проницаемости ($E_{2n} = E_{1n}/\epsilon_2$), а касательная не изменяется ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$), приближенно можно считать $E_{2n} \approx 0$. То есть при расчетах распределения электрического поля внутри полупроводниковых приборов принимают, что на их свободных границах нормальная составляющая напряженности поля отсутствует.